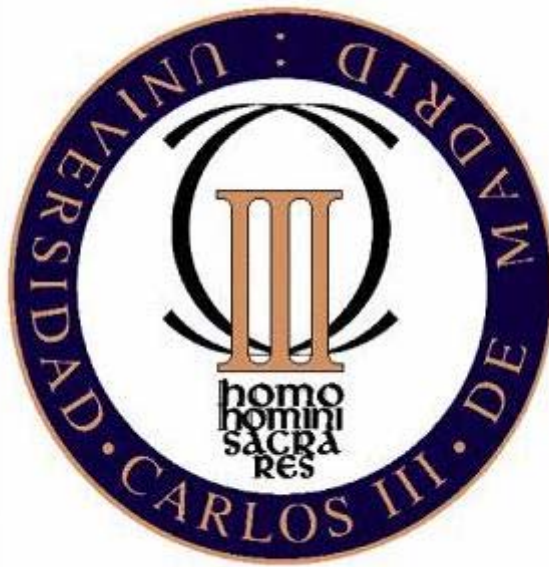


UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

**DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y
COMUNICACIONES**



PROYECTO FINAL DE CARRERA:

**COMPARATIVA DE TÉCNICAS NO LINEALES DE
IGUALACIÓN Y PRECODIFICACIÓN EN SISTEMAS
MIMO**

**AUTORA: MARÍA PILAR IGUALADA VILLODRE
TUTORA: MATILDE P. SÁNCHEZ FERNÁNDEZ**

TÍTULO: COMPARATIVA DE TÉCNICAS NO LINEALES DE IGUALACIÓN Y PRECODIFICACIÓN EN SISTEMAS MIMO

AUTORA: MARÍA PILAR IGUALADA VILLODRE

TUTORA: MATILDE P. SÁNCHEZ FERNÁNDEZ

La defensa del presente Proyecto Fin de Carrera se realizó el día 1 de Julio de 2009 siendo calificada por el siguiente tribunal:

PRESIDENTE: ÁNGEL BRAVO SANTOS

SECRETARIO: HAROLD MOLINA BULLA

VOCAL: MARIO MUÑOZ ORGANERO

Habiendo obtenido la siguiente calificación:

CALIFICACIÓN:

Presidente

Secretario

Vocal

Agradecimientos

A mis padres, por haberme apoyado siempre, en las alegrías y en las desilusiones y sobre todo por no haber perdido nunca la fe en mí.

A mi hermana, por haber estado siempre a mi lado y por ser el hombro en el que siempre me apoyo para seguir caminando.

A mi abuela, por recordarme siempre las cosas que de verdad son importantes.

A mi tía Paqui, mi segunda madre o mi hermana mayor, según el momento.

A Jorge, por haber sabido siempre entender mis prioridades sin reproches.

A Francisco, Narjiss, Álvaro, Rodrigo, Taveira, Lorena y David por haber compartido conmigo todos estos años tan duros y bonitos al mismo tiempo.

A mis amigas que desde pequeña han compartido conmigo todo.

A Mati, además de por su ayuda académica, por el apoyo y la comprensión que me ha prestado siempre.

A todos los que quiero, gracias.

Índice de Contenidos

Índice de Contenidos	4
Índice de Ilustraciones	9
Resumen	13
Capítulo 1: Introducción	14
1. Motivación:	14
2. Estado del Arte:	15
3. Objetivos:	17
4. Historia y Situación Actual de las Tecnologías MIMO:	18
5. Definición de Sistema MIMO. Técnicas Asociadas y Mejoras Introducidas.....	19
Capítulo 2: Conceptos Teóricos Previos	21
1. Introducción.....	21
2. Características de Propagación del Canal Radio	21
Atenuación:	22
Propagación Multitrayecto.....	22
Efecto Doppler:	23
Desvanecimiento:	23
Modelos de desvanecimiento:	24
3. El Canal Multiple-Input Multiple-Output (MIMO):	25
Modelo del Canal MIMO:	25
Capítulo 3: La Arquitectura V-BLAST	28
1. Introducción:	28
2. Vertical-BLAST:	29

El Proceso de Detección	30
Orden de Detección Óptimo:	32
Criterio ZF:	33
Algoritmo de Detección V-BLAST/ZF:	34
Criterio MMSE:	35
Algoritmo de Detección V-BLAST/MMSE:	35
Análisis de Coste Computacional:	37
3. Diagonal-BLAST:	38
4. Debilidades de la Arquitectura BLAST:	39
Capítulo 4: Modificación del Algoritmo de Detección de V-BLAST: V-BLAST/MAP	41
1. Introducción:	41
2. Modelo de Canal MIMO Asumido:	42
3. El Problema de la Detección de Símbolos:	43
4. Algunos Algoritmos de Detección:	45
5. Algoritmo V-BLAST/MAP:	46
Algoritmo de Detección V-BLAST/MAP:	47
Algoritmo de Detección V-BLAST/ZF/MAP:	47
Algoritmo de Detección V-BLAST/MMSE/MAP:	49
6. Conclusiones:	50
Capítulo 5: El Algoritmo GDFE	51
1. Introducción:	51
2. Ecuación de Decisiones Realimentadas:	52
Ecuación Realimentada de Decisiones de Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE-DFE):	53
Ecuación Realimentada de Decisiones Forzador de Ceros (ZF-DFE)	56

3. Modelos de Canal Canónicos:	58
4. Relaciones entre los Receptores ZF-DFE y MMSE-DFE:	61
5. Particionamiento Generalizado del Canal: El GDFE	62
Descomposición del Paquete de Entrada al Canal:	63
Canales Canónicos de Longitud Finita:	65
Desarrollo Generalizado de Decisiones Realimentadas:	66
GDFE-ZF:	69
Precodificador para el GDFE	70
Capítulo 6: Relación entre V-BLAST y GDFE:	71
1. Introducción	71
2. GDFE	72
GDFE/ZF	73
GDFE/MMSE:	74
3. V-BLAST	75
V-BLAST/ZF:	75
V-BLAST/MMSE:	77
4. Equivalencia de las Operaciones Receptoras entre V-BLAST y GDFE	78
Caso ZF:	78
Caso MMSE:	79
5. Conclusiones	81
Capítulo 7: Transmisión Espacio-Tiempo usando la Pre-codificación Tomlinson Harashima	82
1. Introducción:	82
2. Modelo de canal y BLAST:	85
Canal MIMO:	85

BLAST:.....	86
3. Precodificación Tomlinson-Harashima	86
Concepto Básico:	86
Cálculo de la Matriz de Filtrados:.....	91
4. Extensiones:.....	93
Pre-codificación con el filtro de Realimentación hacia delante en el Receptor:	93
Pre-codificador Fijo y Ecualización Residual Adaptativa:.....	94
5. Conclusiones:	95
Capítulo 8: Resultados.....	96
1. Comparativa V-BLAST:	96
Comportamiento con la SER:	96
Comportamiento con el número de antenas:.....	97
Influencia de la modulación utilizada:.....	100
2. Comparativa GDFE:	103
Comportamiento con la SER:	103
Comportamiento con el número de antenas:.....	104
Influencia de la modulación utilizada:.....	107
3. Comparativa V-BLAST/MAP:.....	109
Comportamiento con la SER:	109
Comportamiento con el número de antenas:.....	111
Influencia de la modulación utilizada:.....	114
4. Comparativa Tomlinson-Harashima:	116
Comportamiento con la SER:	116
Comportamiento con el número de antenas:.....	117

Influencia de la modulación utilizada:.....	120
5. Comparativa General de Algoritmos:.....	123
Comportamiento con la SER:	123
Comportamiento con el número de antenas:.....	124
Influencia de la modulación utilizada:.....	128
Mayor número de antenas transmisoras que receptoras:	129
Capítulo 9: Conclusiones.....	131
Capítulo 10: Líneas Futuras.....	134
Relación de Acrónimos:	135
Referencias Bibliográficas:.....	137
Anexo	140
1. Factorización de Cholesky.....	140

Índice de Ilustraciones

Figura 1: Modelo de un sistema MIMO con $N_T \times N_R$ antenas	26
Figura 2: Esquema del Canal MIMO	29
Figura 3: Esquema empleado	43
Figura 4: Ecualización de Decisiones Realimentadas	52
Figura 5: Modelos de canal canónicos para la misma información mutua	58
Figura 6: Descomposición de s en las componentes de paso y nula	63
Figura 7: El canal original y su equivalente una vez eliminada la singularidad	64
Figura 8: DFE Generalizado.....	68
Figura 9: Estructura de ecualización GDFE	72
Figura 10: Obtenida de [22]	90
Figura 11: Valor de SER frente a $E_b N_0$ para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	97
Figura 12: Valor de SER frente a $E_b N_0$ para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	98
Figura 13: Valor de SER frente a $E_b N_0$ para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	99
Figura 14: Valor de SER frente a $E_b N_0$ para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	100
Figura 15: Valor de SER frente a $E_b N_0$ para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM y 16 QAM respectivamente	101
Figura 16: Valor de SER frente a $E_b N_0$ para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 16 QAM.....	102

Figura 17: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	103
Figura 18: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	104
Figura 19: Valor de SER frente a E_bN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	105
Figura 20: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	106
Figura 21: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM y 16-QAM respectivamente.....	107
Figura 22: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 16-QAM.....	108
Figura 23: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	109
Figura 24: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 16-QAM.....	110
Figura 25: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	111
Figura 26: Valor de SER frente a E_bN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	112
Figura 27: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	113
Figura 28: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 16-QAM.....	114

Figura 29: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	115
Figura 30: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	116
Figura 31: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	117
Figura 32: Valor de SER frente a E_bN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	118
Figura 33: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	119
Figura 34: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	120
Figura 35: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 16-QAM.....	121
Figura 36: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM y 16-QAM respectivamente.....	122
Figura 37: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	123
Figura 38: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	125
Figura 39: Valor de SER frente a E_bN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	126
Figura 40: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	127

Figura 41: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 16-QAM.....	128
Figura 42: Valor de SER frente a E_bN_0 para 3 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	129
Figura 43: Valor de SER frente a E_bN_0 para 6 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM.....	130

Resumen

Este documento aborda la descripción, análisis, implementación y simulación de varias estrategias empleadas en transmisión y/o en recepción, cuyo objetivo es el de eliminar la *Interferencia Intersimbólica (ISI)* en un sistema *Multiple Input Multiple Output (MIMO)* multi-usuario.

La primera estrategia estudiada es la técnica de multiplexación espacial conocida como *V-BLAST (Vertical- Bell Layered Space-Time)*, en cuyo esquema se lleva a cabo una codificación y decodificación secuencial.

En segundo lugar, se estudia una modificación del algoritmo de detección que emplean las técnicas *V-BLAST*, denominada *V-BLAST/MAP*, con la que se consigue una mejora de la actuación, introduciendo una complejidad ligeramente superior.

En tercer lugar se lleva a cabo un estudio del algoritmo de decodificación *GDPE*, que representa una generalización de los *DFE's* tradicionales.

En último lugar se estudia la técnica de pre-codificación no lineal conocida como *Tomlinson-Harashima* que emplea ecualización espacial, con la que también se pretende en este proyecto hacer una comparación entre estrategias duales en transmisión y en recepción.

A partir de los resultados obtenidos en simulación, se realiza una comparativa de las distintas técnicas estudiadas, de cara a su implantación en sistemas de comunicaciones presentes y futuros.

Capítulo 1: Introducción

1. Motivación:

El elevado número de productos y servicios inalámbricos, con exigencias crecientes en términos de tasa de transmisión, calidad de servicio, etc, unido a la limitación del ancho de banda utilizable inherente a ellos, fuerza la búsqueda de técnicas que permitan un mejor aprovechamiento de este escaso recurso.

Los sistemas *MIMO* (*Multiple-Input Multiple-Output*) son una prometedora alternativa, que ha concentrado la mayor parte de los esfuerzos investigadores en esa línea. Los sistemas *MIMO* permiten grandes aumentos de eficiencia espectral y capacidad del canal gracias al uso de varias antenas tanto en transmisión como en recepción.

Las técnicas de multiplexación espacial conocidas como *BLAST* son una de las propuestas más atractivas, ya que prometen eficiencias espectrales inalcanzables con los sistemas tradicionales.

En la literatura [30], se afirma que el procesamiento de recepción *V-BLAST* puede interpretarse como un caso especial del *GDFE* (Ecuilizador Realimentado de Decisiones), que es una generalización de la conocida idea de la realimentación de decisiones. Su objetivo es el de alcanzar las elevadas eficiencias espectrales obtenidas por *V-BLAST*, aprovechando el gran conocimiento acumulado acerca de los *DFE*'s.

En el presente proyecto se aborda el estudio de la citada equivalencia, además de analizar algunas de las variaciones introducidas a dichas técnicas, donde el procesado podría hacerse tanto en transmisión como en recepción.

2. Estado del Arte:

Los productos inalámbricos son omnipresentes en la sociedad actual. A pesar de la crisis sufrida en diversas áreas del sector tecnológico, la industria de telecomunicaciones inalámbricas ha experimentado un crecimiento significativo y sostenido en las últimas décadas, llegando a convertirse en parte sustancial de nuestras vidas.

La aparición de gran cantidad de nuevas aplicaciones que demandan crecientes tasas de transmisión, mayor calidad de servicio (*QoS*), etc., sobre un ancho de banda fijo, hace imprescindible la investigación de nuevas técnicas que permitan un aumento en la eficiencia espectral (y por consiguiente, en la capacidad de las redes inalámbricas que las implementan) respecto a las usadas anteriormente.

Numerosos estudios en sistemas de comunicación inalámbricos han mostrado que el uso de múltiples antenas, tanto en transmisión como en recepción, ofrece la posibilidad de comunicación inalámbrica a tasas de transmisión más altas en comparación con sistemas de antena única [6].

Se ha demostrado que la capacidad teórica de estos sistemas *MIMO*, crece linealmente según el mínimo del número de antenas transmisoras y receptoras en entornos con alta dispersión para ratios de relación señal a ruido (*SNR*) lo suficientemente altos.

La demanda de crecientes tasas de transmisión en tecnologías móviles y en redes de área local inalámbricas (*WLAN*) ha impulsado la búsqueda de nuevas técnicas de transmisión que no comprometan el limitado ancho de banda disponible. Esta búsqueda ha llevado a proponer algunos algoritmos de detección para explotar la alta calidad ofrecida por los canales *MIMO*, entre ellos los algoritmos *V-BLAST* y *GDFE*.

En un entorno multi-usuario, *V-BLAST* utiliza una estructura en capas cuyo principio de funcionamiento es muy simple: consiste en hacer una primera decisión de la señal más “poderosa”. A partir de dicha decisión, se regenera la señal recibida de dicho usuario, que es extraída de la señal obtenida en recepción. Con esta nueva señal se procede a la detección del segundo usuario más poderoso, ya que ya se ha eliminado la

primera, y así sucesivamente. Se consigue de esta forma que el vector recibido contenga menor interferencia.

Por su parte, el algoritmo *GDFE* es una generalización de los Ecualizadores de Realimentación de Decisiones (*DFE's*).

Se afirma que el procesamiento en recepción de la arquitectura *V-BLAST* puede verse como un *GDFE* [30], cuando se aplica a un canal *MIMO*. Por tanto, podemos decir que el algoritmo *GDFE* es un algoritmo adaptativo para decodificar sistemas *MIMO* de variación rápida en el tiempo, basado en la arquitectura *V-BLAST*.

En el caso del *GDFE*, para cada instante de tiempo, los símbolos se detectan sucesivamente y se cancelan del vector de datos recibidos a través del filtrado de la realimentación de decisiones. Los coeficientes o pesos del filtro y el orden de detección de símbolos se actualizan usando un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (*RLS*), basado en el tiempo y con actualización de orden.

3. Objetivos:

Los objetivos del presente proyecto pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. Dar una visión histórica y general de la evolución y situación actual de los canales *MIMO*.
2. Analizar e implementar los algoritmos *V-BLAST* en sus versiones *MMSE* y *ZF* y comparar sus atractivas prestaciones con otras técnicas.
3. Analizar e implementar la modificación del algoritmo *V-BLAST* original, conocida como *V-BLAST/MAP*, en sus versiones *MMSE* y *ZF*, que mejora las prestaciones proporcionadas por la versión original, incrementando ligeramente la complejidad.
4. Analizar e implementar el algoritmo *GDFE* en sus dos versiones y comprobar su equivalencia teórica con respecto a la técnica *V-BLAST*.
5. Analizar e implementar la técnica de pre-codificación *Tomlinson-Harashima*, para comparar el uso de estrategias duales en transmisión y en recepción.
6. En último lugar, se extraen las conclusiones obtenidas tras el estudio y comparación de las distintas técnicas.

4. Historia y Situación Actual de las Tecnologías MIMO:

Las primeras ideas sobre este tipo de sistemas pueden encontrarse en los trabajos de A. R. Kaye y D. A. George (1970) y W. van Etten (1975 y 1976), así como en los artículos sobre “conformado de haz” (del término inglés “beamforming”) publicados por Winters y Jack Salz, de Bell Laboratories (1984 a 1986).

Sin embargo, podemos considerar como el verdadero comienzo de las técnicas *MIMO* el trabajo de A. Paulraj y T. Kailath en 1994 [1], en que se propone el concepto de multiplexado espacial utilizando técnicas *MIMO*. En 1998, M.J. Gans y G. J. Foschini realizaron un nuevo y más profundo estudio de los límites de la tecnología *MIMO* [5] y [6]. Posteriormente, ese mismo año 1998, Bell Labs fue la primera compañía en presentar un prototipo de laboratorio basado en multiplexación espacial.

En lo referente a estándares, actualmente podemos encontrar técnicas *MIMO* integradas en los sistemas celulares de Tercera Generación (3G), como la extensión de acceso de paquetes en enlace descendente de alta velocidad (*HSDPA*) del acceso múltiple por división de código de banda ancha (*WCDMA*); en el estándar *IEEE 802.11n*, para redes *WLAN*; y en *IEEE 802.16*, para redes metropolitanas inalámbricas (*WMAN*), entre otros.

En cuanto a aplicaciones comerciales, el primer sistema comercial con tecnología de acceso múltiple por división ortogonal en frecuencia (*MIMO-OFDMA*), fue desarrollado por Iospan Wireless Inc. en 2001. A partir de 2006, otras compañías, como Beceem Communications, Samsung, Runcom Technologies, etc., han desarrollado soluciones basadas también en *MIMO-OFDMA* para el estándar de telefonía móvil de banda ancha *IEEE 802.16e WIMAX*, así como sistemas *MIMO-OFDM* para el estándar *WiFi 802.11n* (ya se había mencionado previamente que ambos estándares incorporan el uso de técnicas *MIMO*).

Así pues, se aprecia como el desarrollo experimentado por las tecnologías *MIMO* puede calificarse como fulgurante, completándose el ciclo de desarrollo teórico, verificación experimental, creación de estándares y aparición de aplicaciones comerciales en prácticamente una década.

5. Definición de Sistema MIMO. Técnicas Asociadas y Mejoras Introducidas

Un sistema *MIMO* puede ser definido como aquel que incluye uno o varios enlaces inalámbricos en los que se usan dos o más antenas tanto en transmisión como en recepción. Diversos análisis teóricos y experimentales muestran el potencial aumento de capacidad de transmisión de dichos sistemas, normalmente llevada a cabo mediante el uso de procesamiento espacio-tiempo.

Si consideramos una fuente emitiendo en campo lejano, la respuesta de un array de antenas a la onda producida por ésta, propagándose en espacio libre, puede ser representada por un vector $\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_N]^T$, siendo N_R el número de antenas en el receptor. El vector $\bar{\mathbf{h}}$ es conocido como “firma espacial” de la fuente. En la práctica, la dispersión producida por diversos objetos dará como resultado la superposición de diversas contribuciones correspondientes a la dispersión individual de dichos objetos incidiendo desde varios ángulos y con distintos retardos. La firma espacio-temporal resultante mostrará, en general, desvanecimiento multi-camino [7].

Los distintos caminos recorridos por la señal hasta cada uno de los receptores harán que, en general, si éstos son considerados independientes, podamos suponer con una alta probabilidad que al menos uno de ellos no se encontrará en un desvanecimiento en un momento dado, lo que podrá ser utilizado para conseguir una ganancia en la relación señal a ruido (y por tanto, en la eficiencia espectral con que podemos utilizar el enlace) [7].

Esta ganancia, conseguida mediante el empleo de varias antenas en transmisión y/o recepción, es conocida como ganancia por diversidad espacial. En el caso de los sistemas *MIMO*, encontramos ganancia por diversidad espacial tanto en transmisión como en recepción.

Sin embargo, es más importante aún el aumento de capacidad conseguido gracias al ancho de banda “espacial” que estos sistemas proporcionan, permitiendo la multiplexación espacial [8], cuyo principio estipula que múltiples flujos de datos independientes pueden ser enviados simultáneamente y en la misma banda de frecuencia sobre el canal *MIMO* y ser recuperados en el receptor, si se usa un procesamiento de señal adecuado (el llamado espacio-tiempo).

En concreto, una de las categorías más representativas de procesamiento de señal espacio-tiempo son: los sistemas *BLAST* [5], en los que el flujo de datos a enviar es dividido igualitariamente entre las distintas antenas y transmitido, solapándose en tiempo y frecuencia los distintos sub-flujos; y la codificación espacio-temporal, basada en la transmisión de manera adecuada del mismo flujo de datos en todas las antenas transmisoras simultáneamente, de modo que, si la probabilidad de pérdida de un símbolo a través de un canal es p , la transmisión a través de N_T canales independientes conseguirá una probabilidad de pérdida p^{N_T} , inferior a la original. Así pues, los sistemas *BLAST* aprovechan la diversidad proporcionada por los enlaces *MIMO* para transmitir N_T veces más símbolos (siendo N_T el número de antenas transmisoras), mientras que la codificación espacio-temporal busca la transmisión de la misma cantidad de símbolos de manera más fiable [9].

Capítulo 2: Conceptos Teóricos Previos

1. Introducción

Los dispositivos inalámbricos como los teléfonos móviles, han ido ganando una creciente popularidad en los últimos años. Aunque en los primeros teléfonos el único servicio portador ofrecido era el de voz, pronto se añadió el servicio de texto *SMS* (*Short Message Service*) y de forma más reciente un conjunto de servicios multimedia que incluye la transmisión de imágenes, vídeos, internet, etc. Su creciente demanda y el aumento de la tasa de transmisión que requieren dichos servicios han impulsado enormemente la investigación en este campo, proponiendo nuevas técnicas de transmisión que consiguen aumentar la tasa de transmisión sin comprometer el limitado ancho de banda disponible y por tanto aumentando la eficiencia espectral.

La capacidad máxima de un canal radio con un cierto ancho de banda está limitada por la fórmula de *Shanon* [31]. El límite de *Shanon* proporciona el límite de capacidad, que tendremos que redefinir para sistemas multi-antena.

2. Características de Propagación del Canal Radio

En un entorno real, las ondas de radio procedentes de dispositivos móviles se transmiten a través del aire, los edificios y otro tipo de obstáculos. Las reflexiones en distintos objetos hacen que las ondas recorran diferentes caminos hasta alcanzar el receptor. El movimiento de los objetos en el propio canal o el del receptor causan un aparente desplazamiento en la frecuencia portadora. Un sistema de comunicación fiable intenta solventar u obtener ventaja de estas perturbaciones del canal.

Atenuación:

La atenuación es la pérdida de potencia media en la señal. Los factores responsables de la atenuación son los obstáculos entre transmisor y receptor, las propiedades físicas del medio en que se transmite, los fenómenos atmosféricos, etc. La atenuación debida únicamente a la distancia entre los extremos aumenta exponencialmente, y además de esto aparece otro tipo de atenuación debida a los obstáculos de gran tamaño como edificios, montañas, etc., conocida como *desvanecimiento log-normal*. Se han propuesto algunos modelos geométricos para explicar estas pérdidas a gran escala, pero es más habitual utilizar modelos estadísticos que describen de forma precisa entornos particulares. Estadísticamente, se considera la atenuación como una variable aleatoria con una distribución conocida. Una expresión común para modelar la atenuación es:

$$P(d)[dB] = \bar{P}(d_0) + 10 \cdot n \cdot \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_\sigma \quad \text{Ecuación 2.2.1}$$

Donde, X_σ es una variable gaussiana de media cero (en dB) y desviación típica σ (también en dB) que modela el efecto del desvanecimiento log-normal. Las pérdidas a una distancia arbitraria d se describen estadísticamente en relación a un punto de referencia d_0 (cuyas pérdidas vienen representadas por el término $\bar{P}(d_0)$), el exponente de pérdidas n y la desviación típica σ . El exponente n puede variar desde 1.6 (en interior y con visión directa) hasta 6 (en entorno urbano).

Propagación Multitrayecto

Las ondas radioeléctricas que llegan al receptor tras recorrer caminos distintos lo hacen en distintos instantes y fases aleatorias, y pueden combinarse, constructiva o destructivamente. El resultado inmediato es una fluctuación en la amplitud de la señal. Sin embargo, la atenuación media a gran escala permanecerá constante.

La cuantificación del fenómeno de la propagación multitrayecto en un canal la proporciona el valor *RMS delay spread* o valor cuadrático medio de la dispersión del retardo (σ_{rms}). Tradicionalmente se dice que el canal ofrece una atenuación selectiva en frecuencia si este valor es superior al periodo de símbolo. En otros casos son más estrictos al considerar que esto se cumple cuando el producto ancho de banda-dispersión del retardo satisface:

$$B \cdot \tau \geq 0.1$$

Ecuación 2.2.2

El desvanecimiento multitrayecto ha sido tradicionalmente considerado uno de los mayores problemas a los que tienen que enfrentarse las transmisiones inalámbricas. Los sistemas *MIMO* estudiados explotan este fenómeno para convertirlo en una ventaja para el usuario, hasta el punto de que se comportarán mejor cuanto más dispersivo sea el canal, aumentando las velocidades de transmisión.

Efecto Doppler:

Cuando existe un movimiento relativo entre el transmisor y el receptor, éste percibe un cambio en la frecuencia portadora. Este fenómeno se conoce como el *Efecto Doppler*. El desplazamiento de frecuencia f_d depende de la velocidad relativa, la dirección del movimiento y la frecuencia de portadora:

$$f_d = \frac{v}{\lambda} \cdot \cos \theta$$

Ecuación 2.2.3

Siendo v la velocidad relativa, λ la longitud de onda de la portadora y θ el ángulo entre la dirección de movimiento y la de propagación de la onda.

Desvanecimiento:

El resultado de la propagación multicamino y el desplazamiento Doppler es el llamado *desvanecimiento*, que consiste en la variación rápida o a pequeña escala de la señal (en una pequeña distancia o intervalo de tiempo), siguiendo constante la atenuación a gran escala.

El desvanecimiento puede ser selectivo en frecuencia o tener respuesta plana dependiendo de la estructura multicamino del canal, y puede ser lento o rápido en función del *desplazamiento Doppler*. El desvanecimiento selectivo en frecuencia es fuente común de errores en comunicaciones móviles debido a que produce interferencia entre símbolos *ISI* (*Inter Symbol Interference*). En la actualidad se lleva a cabo la aplicación en sistemas *MIMO* de técnicas de modulación (como

OFDM) que utilizan subcanales de pequeño ancho de banda, de forma que el desvanecimiento se puede considerar de respuesta frecuencial plana.

La velocidad con la que cambia el canal en comparación con las variaciones de la señal determina un desvanecimiento lento o rápido, causado por el *efecto Doppler*. En las principales referencias bibliográficas consultadas se considera un desvanecimiento lento. En concreto, el modelo de canal utilizado será cuasi-estacionario, es decir, se convendrá que el canal no cambia al menos durante la transmisión de una ráfaga de datos.

Modelos de desvanecimiento:

El fenómeno de desvanecimiento se suele describir estadísticamente mediante la *distribución de Rayleigh*. La función de densidad de probabilidad (FDP) de una distribución Rayleigh viene dada por:

$$p(r) = \begin{cases} 0, & (r < 0) \\ \frac{r}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), & (0 \leq r \leq \infty) \end{cases} \quad \text{Ecuación 2.2.4}$$

Donde σ es el valor cuadrático medio (amplitud) de la señal recibida y σ^2 es su potencia media.

Otra distribución habitual del desvanecimiento utilizada cuando existe una fuerte componente recibida en visión directa, es la *distribución de Rice*, cuya FDP sigue la ecuación:

$$p(r) = \begin{cases} 0, & (r < 0) \\ \frac{r}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{(r^2+A^2)}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{A \cdot r}{\sigma^2}\right), & (0 \leq r \leq \infty) \end{cases} \quad \text{Ecuación 2.2.5}$$

Donde A es la amplitud de pico del trayecto dominante e I_0 representa la *función de Bessel* de primera especie y orden cero. Para el caso particular en que $A=0$ no tenemos componente de visión directa y la función es la de Rayleigh.

3. El Canal Multiple-Input Multiple-Output (MIMO):

El término *MIMO* fue utilizado por primera vez por Jack Winters en 1987 [32] para referirse a dos tipos de sistemas:

- Los que implicaban una comunicación entre varios móviles y una estación base con varias antenas.
- La comunicación entre dos móviles equipados con varias antenas cada uno.

De forma más general, se pueden utilizar múltiples antenas en transmisión, en recepción o en ambos. A estas configuraciones nos referimos como *MISO* (*Multiple-Input Single-Output*) en el primer caso, *SIMO* (*Single-Input Multiple-Output*) en el segundo, y *MIMO* (*Multiple-Input Multiple Output*). Utilizando esta denominación, los sistemas habituales con una única antena en cada extremo reciben el nombre de *SISO* (*Single-Input Single-Output*).

Las arquitecturas *SIMO* y *MISO* corresponden a esquemas de diversidad en recepción y transmisión, respectivamente. Aunque podemos utilizar la arquitectura *MIMO* para obtener una combinación de diversidad en transmisión y recepción, en este proyecto nos centraremos en la aplicación de la tecnología multiantena a la transmisión paralela de datos o multiplexación espacial. Esta tecnología ofrece la posibilidad de conseguir grandes prestaciones ocupando un pequeño ancho de banda.

Modelo del Canal MIMO:

Considerando un canal *MIMO* con N_T antenas transmisoras y N_R antenas receptoras, cuyo esquema se muestra a continuación:

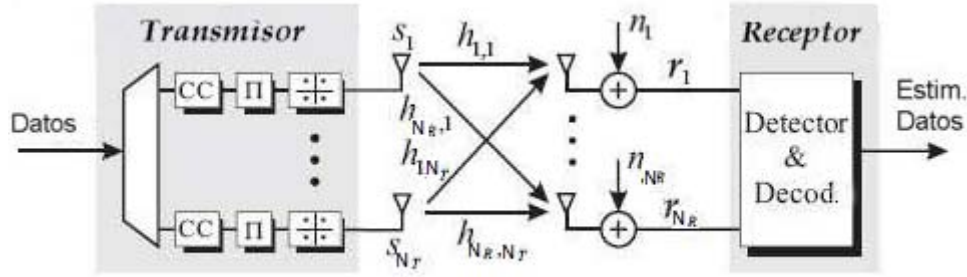


Figura 1: Modelo de un sistema MIMO con $N_T \times N_R$ antenas

La respuesta al impulso del canal entre la antenna transmisora j -ésima ($j=1,2,...,N_T$) y la antenna receptora i -ésima ($i=1,2,...,N_R$) se denota por $h_{ij}(\tau, t)$. De forma más precisa, se trata de la respuesta en el instante t a un impulso aplicado en el instante $t - \tau$. Por lo tanto, consideramos el canal como una red donde cada uno de los transmisores está conectado a cada uno de los receptores. El canal *MIMO* resultante estará representado por la matriz $N_T \times N_R$, $H(\tau, t)$:

$$H(\tau, t) = \begin{bmatrix} h_{11}(\tau, t) & h_{12}(\tau, t) & \dots & h_{1N_T}(\tau, t) \\ h_{21}(\tau, t) & h_{22}(\tau, t) & \dots & h_{2N_T}(\tau, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_R1}(\tau, t) & h_{N_R2}(\tau, t) & \dots & h_{N_RN_T}(\tau, t) \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 2.3.1}$$

El vector $[h_{1j}(\tau, t) \ h_{2j}(\tau, t) \ \dots \ h_{N_Rj}(\tau, t)]^T$ representa la respuesta espacio-temporal inducida por la antenna transmisora j -ésima en el conjunto de antenas receptoras. Con esta consideración, si la antenna j -ésima transmite la señal $s_j(t)$, la señal recibida en la antenna receptora i -ésima estará dada por:

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^{N_T} h_{ij}(\tau, t) * s_j(t) + n_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N_R \quad \text{Ecuación 2.3.2}$$

donde $n_i(t)$ representa el ruido *AWGN* (*Additive White Gaussian Noise*) en el receptor i -ésimo y “*” identifica la operación de convolución.

Asumiendo banda estrecha (lo que permite considerar un desvanecimiento plano), y que estamos trabajando en un instante de tiempo concreto, el efecto del canal se puede representar mediante una matriz \mathbf{H} , constante sobre la banda de interés. De forma normalizada y vectorial la **Ecuación 2.3.2**, teniendo en cuenta lo anterior, pasa a ser (con ρ como relación señal a ruido SNR):

$$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{\rho}{N_r}} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad \text{Ecuación 2.3.3}$$

Donde \mathbf{H} es la matriz de canal de dimensiones $N_T \times N_R$ cuyos coeficientes h_{ij} representan la atenuación entre la antena j -ésima en el transmisor y la antena i -ésima en el receptor; \mathbf{s} es el vector de dimensión $N_T \times 1$ que contiene la señal transmitida por cada una de las antenas y \mathbf{n} es el vector de ruido de dimensión $N_R \times 1$.

Para simplificar podemos prescindir de la constante que acompaña a la matriz \mathbf{H} . La normalización implica que la potencia de pérdidas media en \mathbf{H} es la unidad. De esta forma, las componentes de la matriz aleatoria \mathbf{H} serán variables independientes e idénticamente distribuidas (*iid*), complejas y con una distribución normal de media cero y varianza unidad:

$$H_{ij} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \text{Normal}(0, 1) + \left(\frac{j}{\sqrt{2}}\right) \cdot \text{Normal}(0, 1) \quad \text{Ecuación 2.3.4}$$

Por lo tanto, podemos expresar finalmente, la ecuación que describe el efecto del canal de la forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad \text{Ecuación 2.3.5}$$

Capítulo 3: La Arquitectura

V-BLAST

1. Introducción:

La arquitectura *Bell Labs Layered Space-Time (BLAST)* fue propuesta en su origen por G.J. Foschini en 1996 [5] a través de la versión *Diagonal-BLAST* o *D-BLAST*, que básicamente es un método de multiplexación espacial con codificación y decodificación secuencial. El esquema se puede aplicar a un número cualquiera de antenas, operando en un amplio rango de niveles de *SNR* y velocidades de transmisión. Como consecuencia de la dificultad que planteaba la implementación del sistema *D-BLAST*, Foschini, Wolniansky, Golden y Valenzuela [3] propusieron en 1998 una versión simplificada conocida como *Vertical-BLAST (V-BLAST)*, que prescinde de la rotación de datos entre las antenas a cambio de sacrificar prestaciones en diversidad.

El principio de funcionamiento consiste en repartir el flujo de datos inicial en tantos flujos como antenas hay disponibles en transmisión. Cada uno de estos flujos (también llamados capas o “*layers*”) se codifica de forma independiente; después son transmitidos simultáneamente y en la misma banda de frecuencia. La diferencia entre las dos arquitecturas propuestas es la forma en que se distribuyen las capas entre las antenas transmisoras. La tarea del receptor será distinguir los distintos flujos, algo posible gracias a la propagación multitrayecto que se explicó en el apartado de conceptos previos, y que el algoritmo *BLAST* convierte en su mejor aliada. El proceso de cancelación de las interferencias que producen las distintas contribuciones en recepción es el mismo para ambas versiones del *BLAST*.

En concreto, en el presente proyecto, se describe con detalle la versión *V-BLAST* del algoritmo por su mayor simplicidad. A la hora de realizar las simulaciones, se emplea el algoritmo propuesto por Foschini, Wolniansky, Golden y Valenzuela para la versión *V-BLAST* [3], que se analizará en los siguientes apartados.

2. Vertical-BLAST:

El proceso de transmisión en *V-BLAST* es muy simple. Se divide el flujo de datos inicial, repartiéndolo entre las antenas transmisoras. Cada uno de los sub-flujos resultantes de esta división, se transmite íntegramente en la antena asociada de la siguiente forma: cada sub-flujo se codifica en los símbolos de la constelación utilizada de forma independiente y se transmiten todos ellos simultáneamente en ráfagas, respetando las antenas una separación mínima de una semilongitud de onda. Esto podemos observarlo en el siguiente esquema:

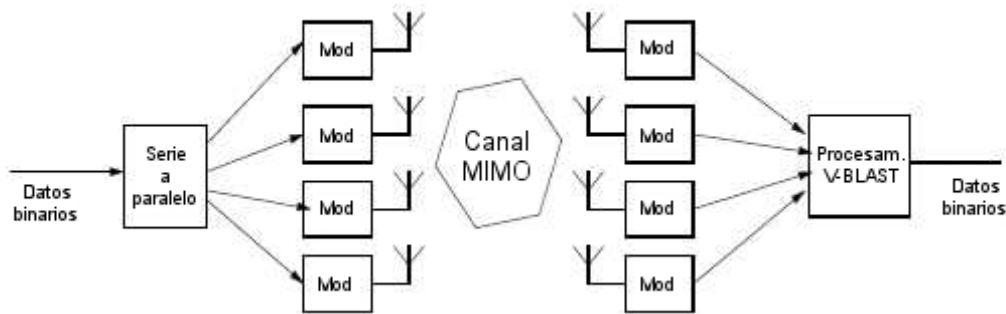


Figura 2: Esquema del Canal MIMO

Se asume por tanto, que se usa la misma constelación para cada subflujo y que las transmisiones se organizan en ráfagas de L símbolos.

La potencia desplegada por cada transmisor es proporcional a $1/N_T$, por lo que el total de la potencia radiada es constante e independiente de N_T .

En el esquema inicial de *V-BLAST* se asume *CSI* (“*Channel State Information*”) únicamente en el receptor, aunque en algunas propuestas de modificación del algoritmo [2], se precisa también en el transmisor.

La matriz de transferencia del canal, H , puede ser calculada enviando una secuencia de entrenamiento. Se suele asumir que su cálculo se ha realizado con una precisión aceptable. No obstante, existen algunas publicaciones consultadas [33] y [34], en las que se procede a analizar el efecto de los errores en las estimaciones del canal.

En *V-BLAST* el proceso de codificación es simplemente una operación de demultiplexación seguida de un mapeado independiente bit a símbolo de cada sub-flujo.

Las N_R antenas receptoras operan independientemente y en la misma banda de frecuencia, y cada una recibe las señales de todos los transmisores, aunque modificadas de forma distinta por el efecto de desvanecimiento multitrayecto y del ruido *AWGN*.

Por simplicidad asumimos el modelo de desvanecimiento plano que vimos en el capítulo anterior y por tanto la matriz del canal es $\mathbf{H}_{(N_T \times N_R)}$ donde h_{ij} es el desvanecimiento desde el transmisor j al receptor i .

A continuación se procede a describir de forma detallada el procesado que se lleva a cabo en el receptor para separar las secuencias de símbolos que se han transmitido por cada una de las antenas.

El Proceso de Detección

El proceso de detección consiste en la estimación de la señal transmitida \mathbf{s} a partir de la señal recibida \mathbf{r} y la estimación del canal \mathbf{H} , que se relacionan a través de la **Ecuación 2.3.5**:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad \text{Ecuación 3.2.1}$$

Se asume que \mathbf{H} y \mathbf{n} son independientes la una de la otra y del vector de datos \mathbf{s} y que la matriz \mathbf{H} tiene rango completo, cuestión de vital importancia para el funcionamiento del sistema *V-BLAST*.

El proceso puede dividirse en dos pasos:

1. Estimación del símbolo recibido tras la **supresión** del resto
2. **Cancelación** del símbolo decodificado en la señal recibida

PASO 1: Supresión de Interferencias:

Denotando \mathbf{h}_i como la columna i -ésima de \mathbf{H} , el vector recibido se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{h}_1 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + \mathbf{s}_{N_T} \cdot \mathbf{h}_{N_T} + \mathbf{n} \quad \text{Ecuación 3.2.2}$$

Donde s_i es el símbolo transmitido desde la antena i -ésima. La supresión se realiza ponderando linealmente los símbolos recibidos con un vector \mathbf{w} satisfaciendo los criterios de *Forzador de Ceros (ZF)* o de *Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE)*. El vector \mathbf{w} para el primer criterio se calcula de forma que:

$$\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{h}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \text{Ecuación 3.2.3}$$

Donde $()^T$ indica la operación de transposición. De esta forma, en el caso del símbolo i -ésimo, la ecuación queda:

$$\begin{aligned} y_i = \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{r} &= \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{h}_1 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{h}_2 + \dots + \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{h}_i + \dots + \\ &\mathbf{s}_{N_t} \cdot \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{h}_{N_t} + \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{n} = 0 + 0 + \dots + \mathbf{s}_i + \dots + 0 + \tilde{\mathbf{n}}_i \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3.2.4}$$

Una vez hecho esto sólo queda estimar el símbolo transmitido a partir de la constelación de la modulación utilizada:

$$\hat{s}_i = Q(y_i) \quad \text{Ecuación 3.2.5}$$

Donde $Q()$ es la función de decisión correspondiente.

PASO 2: Cancelación de Interferencias:

El efecto de los símbolos ya detectados se puede sustraer de la señal recibida, en la que aún hay símbolos por extraer. Esto mejora el funcionamiento cuando el orden de detección ha sido correctamente escogido, pero conlleva algunos riesgos que se comentarán más adelante.

Asumiendo que el símbolo se ha detectado correctamente:

$$\hat{s}_i = s_i$$

La cancelación del símbolo s_i del vector recibido \mathbf{r} se realizaría de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \hat{s}_i \cdot \mathbf{h}_i \quad \text{Ecuación 3.2.6}$$

Este proceso se repite sucesivamente hasta decodificar las N_T ráfagas enviadas. El funcionamiento de este esquema depende de las decisiones realizadas en cada iteración, ya que si se produce un error, éste se propagará en las restantes iteraciones en la **Ecuación 3.2.6** ya que estaremos extrayendo un símbolo incorrectamente decodificado.

Orden de Detección Óptimo:

Para minimizar la propagación de errores, se detectan en primer lugar los símbolos que presentan mayor nivel en recepción.

Un ordenamiento óptimo sencillo se basa en la SNR de cada flujo de datos recibido. La SNR para el i -ésimo símbolo detectado del vector \mathbf{r} viene expresada por:

$$\rho_i = \frac{\epsilon\{|s_i|^2\}}{\sigma^2(\|\mathbf{w}_i\|^2)} \quad \text{Ecuación 3.2.7}$$

Donde σ^2 es la potencia de ruido y $\epsilon\{\}$ representa el valor medio. Dado que

$$\|\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{h}_i\|^2 = \|\mathbf{w}_i^T\|^2 \cdot \|\mathbf{h}_i\|^2 \quad \text{Ecuación 3.2.8}$$

De la **Ecuación 3.2.3**, se deduce que un menor valor de $\|\mathbf{w}_i^T\|^2$ requiere que la correspondiente \mathbf{h}_i tenga una mayor norma-2.

Así pues, la SNR de la ráfaga i -ésima es proporcional a la norma de la columna i -ésima de \mathbf{H} . Por lo tanto, el orden de detección óptimo está íntimamente relacionado con el orden creciente de la norma de las columnas de \mathbf{H} .

Criterio ZF:

Según el criterio ZF (Zero Forcing), el vector \mathbf{w}_i^T coincide con la fila i -ésima de la pseudoinversa de \mathbf{H} [3]:

$$\mathbf{w}_i^T = \langle \mathbf{H}^\dagger \rangle_i \quad \text{Ecuación 3.2.9}$$

Esto es así únicamente en la primera iteración. Según se suceden las cancelaciones, \mathbf{w}_i^T pasa a ser la fila i -ésima de la pseudoinversa no de la matriz \mathbf{H} , sino de la resultante de sustituir con ceros las columnas que corresponden a las ráfagas ya identificadas o decodificadas. Es decir, si $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_{N_t}\}$ es el orden de detección óptimo, en la iteración \mathbf{k}_i el vector de supresión ZF será:

$$\mathbf{w}_{k_i}^T = \langle \mathbf{H}_{k_i-1}^\dagger \rangle_{k_i} \quad \text{Ecuación 3.2.10}$$

Donde \mathbf{H}_{k_i-1} denota la matriz \mathbf{H} con las columnas $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_{i-1}\}$ sustituidas por ceros. Esto último se debe a que en la i -ésima iteración el vector \mathbf{w}_i sólo tiene que ser ortogonal a las \mathbf{h}_j que afectan a los símbolos no decodificados, con $j \geq i$.

Algoritmo de Detección V-BLAST/ZF:

A partir de las técnicas empleadas por el criterio ZF y que se presentaron en el apartado anterior, se obtiene el algoritmo de detección $V\text{-BLAST}/ZF$, que consta de los siguientes pasos:

Fase de Inicialización:

1. $i \leftarrow 1$ Ecuación 3.2.11
2. $G_1 = H^\dagger$ Ecuación 3.2.12
3. $k_1 = \underset{j}{\operatorname{argmin}} \|\langle G_1 \rangle_j\|^2$ Ecuación 3.2.13

Fase de Recursión:

1. $w_{k_i}^T = \langle G_i \rangle_{k_i}$ Ecuación 3.2.14
2. $y_{k_i} = w_{k_i}^T \cdot r_i$ Ecuación 3.2.15
3. $\hat{s}_{k_i} = Q(y_{k_i})$ Ecuación 3.2.16
4. $r_{i+1} = r_i - \hat{s}_{k_i} \cdot h_{k_i}$ Ecuación 3.2.17
5. $G_{i+1} = (H_{k_i})^\dagger$ Ecuación 3.2.18
6. $k_{i+1} = \underset{j \notin \{k_1 \dots k_i\}}{\operatorname{argmin}} \|\langle G_{i+1} \rangle_j\|^2$ Ecuación 3.2.19
7. $i \leftarrow i + 1$ Ecuación 3.2.20

En el paso 3 de la Fase de Inicialización y en el paso 6 de la Fase de Recursión, el orden de detección se realiza en orden ascendente de la norma-2 de las filas de G , que se corresponde con el orden descendente de la norma-2 de las columnas de H .

Criterio MMSE:

En el criterio *MMSE* (*Minimum Mean Squared Error*) el vector de pesos \mathbf{w}_i^T se obtiene de la fila i -ésima de la matriz:

$$\mathbf{G} = \left(\mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} + \frac{N_T}{\rho} \cdot \mathbf{I}_{N_T} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^H \quad \text{Ecuación 3.2.21}$$

Como podemos encontrar en [4]. Al igual que en el criterio *ZF*, previo al cálculo de \mathbf{G} , hay que sustituir por ceros en \mathbf{H} las columnas correspondientes a iteraciones anteriores como en la **Ecuación 3.2.10**.

Se mostrará más adelante que el criterio *MMSE* es menos costoso computacionalmente al ahorrar el cálculo de la pseudoinversa. Además, su rendimiento siempre es mejor que con *ZF*, sobre todo con menor *SNR*, pues es más inmune al efecto del ruido *AWGN*.

Algoritmo de Detección V-BLAST/MMSE:

A partir de lo indicado en el apartado anterior se establece el algoritmo de detección *V-BLAST/MMSE*, que consta de los siguientes pasos:

Fase de Inicialización:

1. $i \leftarrow 1$ Ecuación 3.2.22

2. $\mathbf{G}_1 = \left(\mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} + \frac{N_T}{\rho} \cdot \mathbf{I}_{N_T} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^H$ Ecuación 3.2.23

3. $k_1 = \text{argmin}_j \|\langle \mathbf{G}_1 \rangle_j\|^2$ Ecuación 3.2.24

Fase de Recursión:

1. $\mathbf{w}_{k_i}^T = \langle \mathbf{G}_i \rangle_{k_i}$ Ecuación 3.2.25

2. $y_{k_i} = \mathbf{w}_{k_i}^T \cdot \mathbf{r}_i$ Ecuación 3.2.26

3. $\hat{\mathbf{s}}_{k_i} = \mathbf{Q}(y_{k_i})$ Ecuación 3.2.27

4. $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \hat{\mathbf{s}}_{k_i} \cdot \mathbf{h}_{k_i}$ Ecuación 3.2.28

5. $\mathbf{G}_{i+1} = \left((\mathbf{H}_{k_i})^H \cdot \mathbf{H}_{k_i} + \frac{N_t}{\rho} \cdot \mathbf{I}_{N_t} \right)^{-1} \cdot (\mathbf{H}_{k_i})^H$ Ecuación 3.2.29

6. $k_{i+1} = \underset{j \in \{k_1 \dots k_i\}}{\operatorname{argmin}} \left\| \langle \mathbf{G}_{i+1} \rangle_j \right\|^2$ Ecuación 3.2.30

7. $i \leftarrow i + 1$ Ecuación 3.2.31

En el paso 3 de la Fase de Inicialización y en el paso 6 de la Fase de Recursión, el orden de detección se realiza en orden ascendente de la norma-2 de las filas de \mathbf{G} , que se corresponde con el orden descendente de la norma-2 de las columnas de \mathbf{H} .

Criterio ZF:

El algoritmo de detección del Algoritmo *V-BLAST/ZF* invierte la mayor parte del tiempo en los pasos 5 y 6, donde se calculan el vector de supresión y el orden de detección óptimo. Numéricamente, la forma más estable de calcular la pseudoinversa es a través de la Descomposición en Valores Singulares (*SVD*). En los cálculos presentados a continuación se contabilizan únicamente las multiplicaciones y sumas de números complejos.

- El coste de la *SVD* de una matriz \mathbf{H} de tamaño $m \times n$, utilizando el algoritmo *R-SVD* es de $4 \cdot m^2 \cdot n + 22 \cdot n^3$.
- El cálculo de la pseudoinversa $\mathbf{G} = \mathbf{H}^\dagger$ a partir de la *SVD* necesita $m^2 \cdot n + n^2$ operaciones complejas.

En total se requieren $5 \cdot m^2 \cdot n + 22 \cdot n^3 + n^2$ operaciones para calcular la pseudoinversa. Además de en la fase de inicialización, se realizará este cálculo en cada fase del bucle recursivo, para $i=1$ hasta n , haciéndose más sencillo a medida que las columnas de \mathbf{H} van siendo sustituidas por ceros.

El cómputo global de operaciones complejas es de:

$$\sum_{i=1}^n (5 \cdot m^2 \cdot i + 22 \cdot i^3 + i^2) \quad \text{Ecuación 3.2.32}$$

Y simplificando, tenemos:

$$8 \cdot a^4 + \frac{83}{6} \cdot a^3 + \frac{13}{2} \cdot a^2 \quad \text{Ecuación 3.2.33}$$

Donde se ha asumido $m=n=a$ y se han respetado los términos de exponente cuadrado o superior.

Criterio MMSE:

El cálculo de la pseudoinversa se sustituye por el procesamiento de dos multiplicadores matriciales, una inversión y una suma, ($\mathbf{G} = \left(\mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} + \frac{N_T}{\rho} \cdot \mathbf{I}_{N_T} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^H$). La primera multiplicación requiere $\mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{m}$ operaciones ($\mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H}$), la suma matricial \mathbf{n}^2 ($\mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} + \frac{N_T}{\rho} \cdot \mathbf{I}_{N_T}$) y la inversión (con el Método de Eliminación Gaussiana) otras $4 \cdot \mathbf{n}^3$ operaciones. La segunda multiplicación exige \mathbf{n}^3 operaciones ($(\mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{H}^H)$). En total, el cálculo de la **Ecuación 3.2.21** necesita de:

$$\sum_{i=1}^n (5 \cdot i^3 + i^2 \cdot r + i^2) \quad \text{Ecuación 3.2.34}$$

Tomando términos cuadrados y de orden superior, y simplificando $\mathbf{m}=\mathbf{n}=\mathbf{a}$, la expresión se simplifica a:

$$\frac{19}{12} \cdot \mathbf{a}^4 + \frac{19}{6} \cdot \mathbf{a}^3 + \frac{23}{12} \cdot \mathbf{a}^2 \quad \text{Ecuación 3.2.35}$$

Por tanto, el criterio *MMSE* conlleva un menor coste computacional que la alternativa *ZF*, como se quería demostrar.

3. Diagonal-BLAST:

Como se ha comentado brevemente en la introducción de este capítulo, la diferencia entre *V-BLAST* y *D-BLAST* radica en la distribución de los flujos de datos entre las antenas transmisoras. Mientras que en *V-BLAST* cada uno de ellos se transmite íntegramente en la antena asociada, en *D-BLAST* se irán distribuyendo circularmente de forma que en la transmisión de cada flujo o capa de datos habrán participado todas las antenas, aprovechando la diversidad espacial.

Por motivos de complejidad, este algoritmo no se estudia en profundidad en el presente proyecto, ciñéndonos exclusivamente a la versión *V-BLAST*.

4. Debilidades de la Arquitectura BLAST:

En este apartado se van a exponer algunos de los problemas prácticos asociados con la arquitectura *BLAST*. Algunos se deben a la propia estructura de codificación; otros a la naturaleza discreta de las constelaciones que se suelen utilizar.

Problemas debidos a la estructura en capas:

La arquitectura estratificada plantea fundamentalmente el problema de la propagación de errores. La decodificación de una capa depende de la correcta decodificación de las capas precedentes, pues, como se ha visto, en la fase de cancelación se sustraen de la señal total recibida los símbolos de las capas decodificadas (ver **Ecuación 3.2.6**). Si existe un error al decodificar una de las capas, se propagará en las siguientes. Para reducir la propagación de errores, debemos proteger cada capa con códigos de corrección de error suficientemente robustos, aunque el sistema siempre estaría expuesto a incidentes impredecibles.

Problemas debidos a la interferencia discreta:

Un problema asociado con el criterio *MMSE* es que trata todas las interferencias procedentes de capas no decodificadas como si se tratase de ruido gaussiano, cuando en la práctica se suele tratar de constelaciones *QAM* o *PSK*.

Podemos observar en la **Ecuación 3.2.4** que el ruido se combina con el vector de pesos, resultando un ruido $\tilde{\mathbf{n}}_i$ que ya no seguiría una distribución gaussiana. Si la ganancia del subcanal es muy grande, la distribución sería más parecida a un conjunto de impulsos, que seguiría teniendo la misma varianza. De hecho, la distribución gaussiana es la que presenta la mayor entropía para una varianza dada, por lo que la aproximación de ruido gaussiano es en realidad bastante pesimista. Algunas simulaciones en esta línea muestran una ligera mejora al considerar la naturaleza discreta de las constelaciones en lugar de utilizar la distribución gaussiana.

Problemas debidos al tamaño finito de la constelación:

Otro problema práctico asociado a la arquitectura *BLAST* es el debido al tamaño de constelación finito. El problema es que la cantidad de información transmitida no sólo está limitada por la capacidad del canal sino que también depende del tamaño de constelación utilizado. Recordemos que *BLAST* transforma un canal multi-antena en múltiples canales SISO. Se supone que los canales con una ganancia más favorable deben soportar más información que los canales más débiles. Pero si el tamaño de la constelación utilizada es demasiado pequeño, puede suceder que los canales más robustos no sean capaces de transmitir tanta información como se esperaba, no pudiendo conseguirse la capacidad total del canal.

Algunos autores han estudiado el fenómeno, confirmando las simulaciones que el uso de constelaciones demasiado pequeñas puede acarrear una pérdida de ganancia de diversidad.

Capítulo 4: Modificación del Algoritmo de Detección de V-BLAST: V-BLAST/MAP

A continuación se introduce un nuevo algoritmo de detección de símbolos para canales *MIMO*, consistente en una extensión del algoritmo analizado en el capítulo anterior. Este nuevo algoritmo conocido como *V-BLAST/MAP*, combina elementos del algoritmo original con la regla del Máximo a Posteriori (*MAP*).

La diferencia fundamental entre ambos, radica en la estrategia de ordenamiento de los símbolos detectados. La complejidad del *V-BLAST/MAP* es mayor, aunque la mejora en la actuación es también significativa. Las simulaciones muestran que *V-BLAST/MAP* consigue tasas de error de símbolo próximas al esquema de Máxima Verosimilitud (*ML*), reteniendo a la vez la naturaleza de baja complejidad característica de los esquemas *V-BLAST*.

1. Introducción:

Como se ha mencionado en apartados anteriores, estudios recientes en sistemas de comunicación inalámbricos han mostrado que el uso de múltiples antenas tanto en transmisión como en recepción, ofrece la posibilidad de comunicación inalámbrica a tasas de transmisión más altas en comparación con sistemas de antena única.

Se ha demostrado que la capacidad teórica de estos sistemas *MIMO*, crece linealmente con el menor número de antenas transmisoras y receptoras, en entornos con alta dispersión para ratios de *SNR* lo suficientemente altos.

Se han propuesto algunos algoritmos de detección para explotar la alta calidad espectral ofrecida por los canales *MIMO*, entre los que se encuentra el algoritmo abordado en el apartado anterior.

Se propone en este capítulo un nuevo algoritmo de detección llamado *V-BLAST/MAP* que tiene una estructura en capas como *V-BLAST*, pero usa un algoritmo de detección modificado que conduce a una mejor actuación ante el error que el original para una complejidad ligeramente superior.

2. Modelo de Canal MIMO Asumido:

Se emplea el modelo de canal *MIMO* con N_T antenas transmisoras y N_R antenas receptoras que vimos en el capítulo 2 y que se representa mediante la Ecuación 2.3.6:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad \text{Ecuación 4.2.1}$$

Donde las relaciones entre las componentes \mathbf{H} , \mathbf{s} y \mathbf{n} son las ya mencionadas.

Asumiremos que el receptor tiene perfecto conocimiento de la realización del canal \mathbf{H} , mientras que el transmisor no tiene esa información estática del canal (*CSI*).

3. El Problema de la Detección de Símbolos:

El problema de detección de símbolos aquí considerado es el problema de estimar el vector de entrada \mathbf{s} al canal *MIMO*, dado el vector recibido \mathbf{r} , asumiendo que el receptor tiene perfecto conocimiento de \mathbf{H} .

Esta decisión se toma en una base símbolo a símbolo, sin tener en cuenta cualquier tipo de dependencias estadísticas que podrían estar presentes en la secuencia de vectores \mathbf{s} . En otras palabras, se excluye la codificación a través de la dimensión tiempo y se considera sólo el problema de la modulación/demodulación.

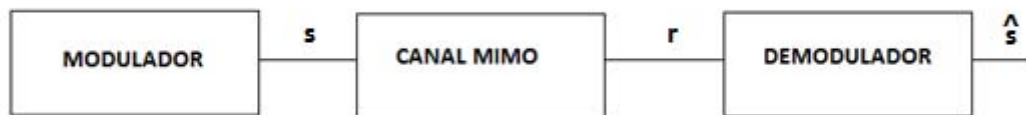


Figura 3: Esquema empleado

El objetivo es minimizar la probabilidad de error de decisión:

$$Pe = Pr\{\hat{\mathbf{s}} \neq \mathbf{s}\} \quad \text{Ecuación 4.3.1}$$

Donde $\hat{\mathbf{s}} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_{N_T})$.

Se estudia el problema anterior de detección bajo las siguientes asunciones sobre el vector de entrada, de forma que:

1. Cada elemento de \mathbf{s} pertenece a un alfabeto de modulación común \mathcal{S} , donde $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{N_T}$. Típicamente \mathcal{S} será un alfabeto *QAM* como por ejemplo $\mathcal{S} = \{\pm \mathbf{a} \pm j\mathbf{b}\}$ como en el caso de *4-QAM*.
2. Se asume que todos los símbolos de \mathcal{S} tienen las mismas probabilidades.

3. El vector \mathbf{s} es un vector aleatorio que verifica:

$$\epsilon\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\} = \frac{\rho}{N_T} \cdot \mathbf{I}_{N_T} \quad \text{Ecuación 4.3.2}$$

Donde ρ es una constante, \mathbf{I}_{N_T} es la matriz de identidad de tamaño N_T , $\epsilon\{\}$ es el operador esperanza y \mathbf{s}^H denota la traspuesta hermítica de \mathbf{s} . La asunción de la **Ecuación 4.3.2** implica que los elementos de \mathbf{s} son incorrelados y que cada uno tiene energía:

$$\epsilon\{|s_i|^2\} = \frac{\rho}{N_T} \quad \text{Ecuación 4.3.3}$$

Cediendo una energía media transmitida total de ρ por símbolo, combinada sobre todas las antenas.

El parámetro ρ tiene también el significado de ser la energía media recibida por símbolo ϵ_S en cada receptora, como puede verse calculando la energía en la antena receptora i :

$$\begin{aligned} \epsilon_S &= \epsilon\left\{\left|\sum_j h_{ij} a_j\right|^2\right\} = \epsilon\left\{\sum_j h_{ij} h_{ik}^* a_j a_k^*\right\} = \sum_j \sum_k \epsilon(h_{ij} h_{ik}^*) \epsilon(a_j a_k^*) \\ &= \sum_j \epsilon(|a_j|^2) = \rho \end{aligned}$$

$$\text{Ecuación 4.3.4}$$

Usando la **Ecuación 4.3.4**, la energía media recibida por bit, en cada antena receptora podría calcularse como:

$$\epsilon_b = \frac{E_S}{\log_2|S|} \quad \text{Ecuación 4.3.5}$$

Y la SNR en el receptor se define como:

$$SNR = \frac{\epsilon_b}{N_0} = \frac{\rho / \log_2|S|}{N_0} \quad \text{Ecuación 4.3.6}$$

4. Algunos Algoritmos de Detección:

Para el problema de detección de señal, una regla de decisión es la **Regla del Máximo a Posteriori (MAP)**, que se define como:

$$\hat{s} = \underset{s' \in S^{N_T}}{\operatorname{argmax}} \{Pr(s'|r \text{ sea recibido})\} \quad \text{Ecuación 4.5.1}$$

Siendo ampliamente conocido que la regla *MAP* minimiza la probabilidad de error P_e . Otra regla de decisión es la **Regla de Máxima Verosimilitud (ML)** que, estableciendo:

$$\hat{s} = s' \in S^{N_T} \quad \text{Ecuación 4.5.2}$$

Para algún s' , se define como:

$$f(r|s') \geq f(r|s'') \text{ para toda } s'' \in S^{N_T} \quad \text{Ecuación 4.5.3}$$

Donde si $\mathbf{n} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, N_0 \cdot \mathbf{I}_{N_R})$:

$$f(r|s) = \frac{1}{(2\pi)^{N_R} \cdot N_0} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \cdot \|\mathbf{H} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2\right\} \quad \text{Ecuación 4.5.4}$$

Y por tanto, la regla *ML* se reduce a:

$$\hat{s} = \underset{s' \in S^{N_T}}{\operatorname{argmin}} \{\|\mathbf{H} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2\} \quad \text{Ecuación 4.5.5}$$

De hecho, la Regla *ML* es equivalente a la Regla *MAP* si todas las fuentes tienen la misma probabilidad a priori de ser transmitidas.

Aunque la Regla *MAP* ofrece una actuación óptima frente al error, presenta complejidad. Tiene complejidad exponencial en el sentido de que el receptor tiene que considerar $|S|^{N_T}$ símbolos posibles para un sistema de N_T antenas transmisoras.

Por ejemplo, si una *64-QAM* se usa con 4 antenas transmisoras, entonces una implementación del detector *MAP* necesita buscar aproximadamente $64^4 = 16777216$ símbolos. Los mismos problemas de complejidad se aplican a los detectores *ML*. La dificultad de detección es causada por la “mezcla” de los elementos de \mathbf{s} a través de la multiplicación por \mathbf{H} .

Para resolver el problema de detección en los sistemas *MIMO*, la investigación se ha enfocado en modelos de recepción subóptimos que son poderosos en términos de actuación frente al error y que son prácticos para propósitos de implementación al mismo tiempo. Un receptor como este, es el *V-BLAST* ya visto, que utiliza una arquitectura de capas y que aplica cancelación sucesiva.

5. Algoritmo V-BLAST/MAP:

En este apartado, se propone un nuevo algoritmo de detección de símbolos para los sistemas *MIMO* [35] que combina características de las reglas *MAP* y *V-BLAST*. Llamamos a este algoritmo *V-BLAST/MAP*.

Este nuevo algoritmo ofrece una mejor actuación frente al error que *V-BLAST* a expensas de un incremento, aunque aún práctico, del nivel de complejidad. *V-BLAST/MAP* tiene una estructura en capas como *V-BLAST* pero incorpora también características de la Regla *MAP*.

Algoritmo de Detección V-BLAST/MAP:

De nuevo se usará el modelo de canal *MIMO* y la notación y asunciones hechas hasta ahora.

Como se ha mencionado, se propone un nuevo algoritmo de detección de símbolos para canales *MIMO*, llamado *V-BLAST/MAP*, que combina características de *V-BLAST* y la Regla *MAP*. Este algoritmo usa la estructura de capas de *V-BLAST* pero emplea una estrategia distinta para el orden de procesamiento del canal, inspirado por la Regla *MAP*.

Algoritmo de Detección V-BLAST/ZF/MAP:

Usando la misma notación del algoritmo *V-BLAST*, el algoritmo *V-BLAST/ZF/MAP* podría describirse como sigue:

Fase de Inicialización:

1. $i \leftarrow 1$ Ecuación 4.5.1

2. $G_1 = H^\dagger$ Ecuación 4.5.2

Fase de Recursión:

1. $w_i^T = G_i$ Ecuación 4.5.3

2. $y_i = w_i^T \cdot r_i$ Ecuación 4.5.4

3. $a_i = Q(y_i)$ Ecuación 4.5.5

4. $p_{ij} = \frac{f_{ij}(y_{ij}|a_{ij})}{\sum_{a' \in S} f_{ij}(y_{ij}|a')}, j \notin \{k_1, \dots, k_{i-1}\}$ Ecuación 4.5.6

5. $k_i = \operatorname{argmax}_{j \notin \{k_1 \dots k_i\}} \{p_{ij}\}$ Ecuación 4.5.7

$$6. \hat{\mathbf{s}}_{k_i} = (\mathbf{a}_i)_{k_i} \quad \text{Ecuación 4.5.8}$$

$$7. \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \hat{\mathbf{s}}_{k_i} \cdot \mathbf{h}_{k_i} \quad \text{Ecuación 4.5.9}$$

$$8. \mathbf{G}_{i+1} = (\mathbf{H}_{k_i})^\dagger \quad \text{Ecuación 4.5.10}$$

$$9. i \leftarrow i + 1 \quad \text{Ecuación 4.5.11}$$

Aquí los vectores $\mathbf{y}_i = (\mathbf{y}_{i1}, \mathbf{y}_{i2}, \dots, \mathbf{y}_{iN_T})^T$ y $\mathbf{a}_i = (\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \dots, \mathbf{a}_{iN_T})^T$ son los equivalentes a las ecuaciones del ZF:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{s}}_{ZF}) \text{ donde: } \hat{\mathbf{s}}_{ZF} = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{r} \quad \text{Ecuación 4.5.12}$$

Dentro de la parte de Recursión, en la **Ecuación 4.5.6**, f_{ij} es una función de densidad dada por:

$$f_{ij}(\mathbf{y}_{ij}|\mathbf{a}_{ij}) = \frac{1}{\pi \cdot \sigma_j^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_j^2} \cdot \|\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{a}_{ij}\|^2 \right\} \quad \text{Ecuación 4.5.13}$$

Donde $\sigma_j^2 = \mathbf{N}_0 \cdot \|(\mathbf{w}_i)_j\|^2$. En la Fase de Recursión, en la **Ecuación 4.5.6** y **Ecuación 4.5.7** el índice j se extiende sobre todos los elementos de $\{1, 2, \dots, N_T\}$, excluyendo aquellos en $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{i-1}\}$, por ejemplo $j \in \{1, 2, \dots, N_T\} \setminus \{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{i-1}\}$.

El algoritmo *V-BLAST/ZF/MAP* es idéntico a *V-BLAST/ZF* excepto por el orden en que son detectados los símbolos. En lugar de seleccionar el siguiente símbolo a ser detectado, de acuerdo con la regla que muestra la **Ecuación 3.2.19**, $\mathbf{k}_{i+1} = \mathbf{argmin}_{j \notin \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_i\}} \|\langle \mathbf{G}_{i+1} \rangle_j\|^2$ aquí el conjunto de todas las decisiones potenciales de símbolo (\mathbf{a}_i) son clasificadas con respecto a sus probabilidades a posteriori de ser correctas, como se estima por p_{ij} .

Por tanto, es importante enfatizar que las p_{ij} no son verdaderas probabilidades *MAP*, sino aproximaciones a cómo de probable es que $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{s}_j$. La aproximación es debida a la omisión en los cálculos de las correlaciones cruzadas entre los términos de ruido $\mathbf{z}_{ij} \triangleq \mathbf{y}_{ij} - \mathbf{a}_{ij}$ en los subcanales componentes. Debemos darnos cuenta de que la permutación de índices $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{i-1})$ producida por *V-BLAST/ZF/MAP* depende

tanto de \mathbf{H} como de \mathbf{r} , a diferencia de *V-BLAST/ZF* donde la permutación depende sólo de \mathbf{H} .

La complejidad de *V-BLAST/ZF/MAP* se incrementa con respecto a la de *V-BLAST/ZF* por el cálculo hecho en la **Ecuación 4.5.6**. El orden de complejidad del cálculo de \mathbf{p}_{ij} es aproximadamente $\mathcal{O}(|\mathbf{S}|)$ para cualquier j fijada, y limitado superiormente por $\mathcal{O}(N^T|\mathbf{S}|)$ cuando se considera como un todo.

Un punto fundamental acerca de las complejidades de *V-BLAST/ZF* y *V-BLAST/ZF/MAP* es que en el 1º se permite el pre-cálculo de todos los vectores de pesos (que pueden usarse repetidamente hasta que \mathbf{H} sea fijada), mientras que en el 2º caso, el vector de pesos debe calcularse en tiempo real.

Este incremento de complejidad de *V-BLAST/ZF/MAP* se justifica por las mejoras en la actuación, como se verá en apartados siguientes, ya que se observa que *V-BLAST/ZF/MAP* actúa significativamente mejor que los receptores *V-BLAST/ZF* y *V-BLAST/MMSE*.

Algoritmo de Detección V-BLAST/MMSE/MAP:

En este apartado se emplea la técnica *MMSE* para calcular la matriz de pesos. El algoritmo *V-BLAST/MMSE/MAP* se describe de la siguiente forma:

Fase de Inicialización:

1. $i \leftarrow 1$

Ecuación 4.5.14

2. $\mathbf{G}_1 = \left(\mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} + \frac{N_T}{\rho} \cdot \mathbf{I}_{N_T} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^H$

Ecuación 4.5.15

Fase de Recursión:

1. $\mathbf{w}_i^T = \mathbf{G}_i$ Ecuación 4.5.16

2. $\mathbf{y}_i = \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{r}_i$ Ecuación 4.5.17

3. $\mathbf{a}_i = \mathbf{Q}(\mathbf{y}_i)$ Ecuación 4.5.18

4. $p_{ij} = \frac{f_{ij}(\mathbf{y}_{ij}|\mathbf{a}_{ij})}{\sum_{\mathbf{a}' \in A} f_{ij}(\mathbf{y}_{ij}|\mathbf{a}')} , j \notin \{k_1, \dots, k_{i-1}\}$ Ecuación 4.5.19

5. $k_i = \underset{j \notin \{k_1, \dots, k_{i-1}\}}{\operatorname{argmax}} \{p_{ij}\}$ Ecuación 4.5.20

6. $\hat{\mathbf{s}}_{k_i} = (\mathbf{a}_i)_{k_i}$ Ecuación 4.5.21

7. $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \hat{\mathbf{s}}_{k_i} \cdot \mathbf{h}_{k_i}$ Ecuación 4.5.22

8. $\mathbf{G}_{i+1} = \left((\mathbf{H}_{k_i})^H \cdot \mathbf{H}_{k_i} + \frac{N_t}{\rho} \cdot \mathbf{I}_{N_t} \right)^{-1} \cdot (\mathbf{H}_{k_i})^H$ Ecuación 4.5.23

9. $i \leftarrow i + 1$ Ecuación 4.5.24

6. Conclusiones:

V-BLAST/MAP proporciona una mejora significativa en la *SER* en comparación con el *V-BLAST* ordinario, tanto para la versión *ZF* como para la *MMSE*, como veremos en el Capítulo de Simulaciones.

La conclusión fundamental es que *V-BLAST/MAP* ofrece una actuación en cuanto a *SER* significativamente mejor que *V-BLAST* para un modesto incremento de la complejidad.

Capítulo 5: El Algoritmo GDFE

1. Introducción:

El algoritmo *GDFE* es una generalización de la idea de realimentación de decisiones, siendo capaz de acercarse a los límites superiores de la comunicación establecidos por la Teoría de la Información.

Se afirma que el procesado en recepción de la arquitectura *V-BLAST* puede verse como un *GDFE* cuando se aplica a un canal *MIMO* [30].

Para cada instante de tiempo, los símbolos son detectados sucesivamente y cancelados del vector de datos recibidos. Para ello, hace uso de un filtro de realimentación de decisiones, cuyos coeficientes son actualizados utilizando un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, basado en el tiempo y con actualización de orden..

Su complejidad es $O(N_T^3)$ pero proporciona algunos “ahorros” con respecto a *V-BLAST*.

2. Ecualización de Decisiones Realimentadas:

La Ecualización de Decisiones Realimentadas hace uso de las decisiones previas en un intento de estimar el símbolo actual. Cualquier interferencia intersimbólica causada por símbolos previos es reconstruida y posteriormente sustraída.

El *DFE* es inherentemente un receptor no lineal. Sin embargo, puede analizarse usando técnicas lineales, si se asume que todas las decisiones previas fueron correctas.

Existe tanto una versión *MMSE* como una versión *ZF* de la realimentación de decisiones. La solución *ZF* (Forzador de Ceros) será un caso especial de la solución de mínimos cuadrados con $SNR \rightarrow \infty$.

A continuación se va a describir el Ecualizador de Decisiones Realimentadas (*DFE*), asumiendo un modelo de canal con *ISI*, siendo $p(t)$ la respuesta impulsiva del canal:

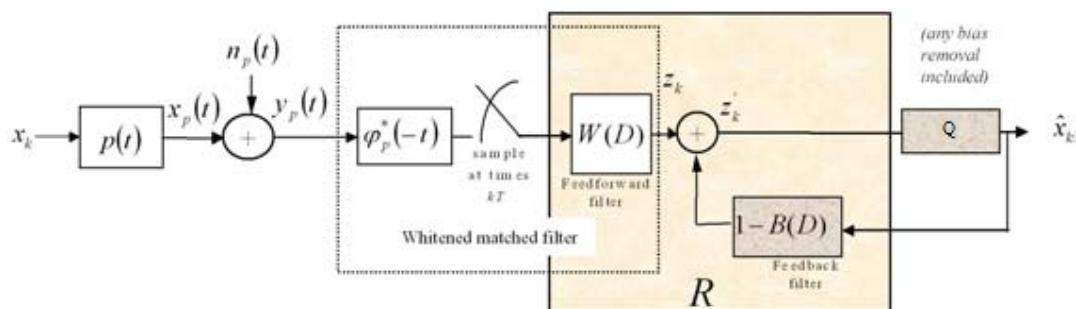


Figura 4: Ecualización de Decisiones Realimentadas

La configuración contiene un ecualizador lineal, $W(D)$, al que se le añade un filtro de realimentación lineal y causal $1-B(D)$, donde $b_0 = 1$. El filtro de realimentación acepta como entrada la decisión sobre el periodo de símbolo anterior, de ahí el nombre de “realimentación de decisiones”. La salida del filtro directo (filtro de ‘feedforward’) se denota mediante $Z(D)$, y la entrada al elemento de decisión $Z'(D)$. El filtro directo intentará conformar la señal de salida del canal de manera que sea una señal causal. La sección de realimentación sustraerá entonces (sin ensalzamiento de ruido) cualquier *ISI*.

Se asume, en todo momento, que las decisiones previas son correctas. En la práctica, esto podría no ser cierto, siendo por tanto una debilidad significativa de la realimentación de decisiones que no puede pasarse por alto. No obstante, el análisis sería extremadamente complejo si se incluyesen errores en la sección de realimentación hacia atrás. Hasta la fecha, la forma más eficiente de especificar el efecto de los errores de realimentación ha sido a través de la medida experimental.

Ecualizador Realimentado de Decisiones de Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE-DFE):

El Ecualizador Realimentado de Decisiones de Mínimo Error Cuadrático Medio (*MMSE-DFE*) optimiza conjuntamente las características tanto del filtro de realimentación hacia delante w_k como del filtro de realimentación hacia atrás $\delta_k - b_k$ para minimizar el error cuadrático medio.

La señal de error *MMSE-DFE* se define mediante la siguiente expresión:

$$e_k = x_k - z'_k \quad \text{Ecuación 5.2.1}$$

El mínimo error cuadrático medio (*MMSE*) para el *MMSE-DFE* es:

$$\sigma^2_{MMSE-DFE} \triangleq \min_{w_k, b_k} E\{|x_k - z'_k|^2\} \quad \text{Ecuación 5.2.2}$$

La secuencia de error puede escribirse de la siguiente forma:

$$E(D) = X(D) - W(D) \cdot Y(D) - [1 - B(D)] \cdot X(D) = B(D) \cdot X(D) - W(D) \cdot Y(D)$$

Ecuación 5.2.3

Para cualquier $B(D)$ fijo, $\epsilon\{E(D) \cdot Y^H(D^{-H})\} = 0$ para minimizar el error cuadrático medio, lo que conduce a la relación:

$$B(D) \cdot R_{xy}(D) - W(D) \cdot R_{yy}(D) = 0 \quad \text{Ecuación 5.2.4}$$

Por tanto,

$$W(D) = \frac{B(D)}{\|p\| \cdot \left(Q(D) + \frac{1}{SNR_{MFB}}\right)} = B(D) \cdot W_{MMSE-LE}(D) \quad \text{Ecuación 5.2.5}$$

Donde $Q(D)$ es la función de autocorrelación: $q(t) \triangleq \gamma_p(t) * \gamma_p^H(-t)$, que además es hermítica ($q^H(-t) = q(t)$). SNR_{MFB} es la SNR más alta posible que puede esperarse para cualquier canal AWGN filtrado (“*Matched- Filter-Bound SNR*”). Además, $MMSE-LE$ representa al Ecualizador Lineal de Mínimo Error Cuadrático Medio (“*Minimum Mean Square Error Linear Equalizer*”).

Para cualquier $B(D)$ con $b_0 = 1$ (además, $W(D) = W_{MMSE-LE}(D) \cdot B(D)$), una consecuencia de la linealidad de la estimación $MMSE$, de manera que $E(D) = B(D) \cdot E_{MMSE-LE}(D)$.

La función de autocorrelación de la secuencia de error con $B(D)$ arbitrario y mónico (con unos en la diagonal) es:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ee}(D) &= B(D) \cdot \epsilon_x \cdot B^H(D^{-H}) - 2\Re\{B(D) \cdot R_{xy}(D) \cdot W^H(D^{-H})\} + W(D) \cdot R_{yy}(D) \\ &\quad \cdot W^H(D^{-H}) = B(D) \cdot \epsilon_x \cdot B^H(D^{-H}) - W(D) \cdot R_{yy}(D) \cdot W^H(D^{-H}) \\ &= B(D) \cdot \epsilon_x \cdot B^H(D^{-H}) - B(D) \cdot \frac{R_{xy}(D)}{\|p\| \cdot \left(Q(D) + \frac{1}{SNR_{MFB}}\right)} \cdot B^H(D^{-H}) \\ &= B(D) \cdot R_{MMSE-LE}(D) \cdot B^H(D^{-H}) \end{aligned}$$

Ecuación 5.2.6

Donde $R_{MMSE-LE}(D) = \frac{N_0/2}{\|P\|^2} \cdot \frac{1}{(Q(D) + 1/SNR_{MFB})}$ es la función de autocorrelación para la secuencia de error de un ecualizador lineal *MMSE*.

Si estudiamos con más detalle $B(D)$, la autocorrelación inversa tiene factorización *Cholesky*:

$$Q(D) + \frac{1}{SNR_{MFB}} = \gamma_0 \cdot G(D) \cdot G^H(D^{-H}) \quad \text{Ecuación 5.2.7}$$

Donde γ_0 es un número real positivo y $G(D)$ es una respuesta canónica al filtro. Una respuesta al filtro $G(D)$ se denomina *canónica* si es causal ($g_k=0$, para $k<0$), *mónica* ($g_0=1$) y *de fase mínima* (todos sus polos están fuera del círculo unidad y todos sus ceros están sobre o fuera del círculo unidad). Si $G(D)$ es canónica, entonces $G^H(D^{-H})$ es anti-canónica, es decir, anti-causal, mónica y de “fase máxima” (todos los polos están dentro del círculo unidad y todos los ceros están dentro o sobre el círculo unidad). Usando esta factorización:

$$R_{ee}(D) = \frac{B(D) \cdot B^H(D^{-H})}{Q(D) + 1/SNR_{MFB}} \cdot \frac{N_0/2}{\|P\|^2} \quad \text{Ecuación 5.2.8}$$

$$= \frac{B(D)}{G(D)} \cdot \frac{B^H(D^{-H})}{G^H(D^{-H})} \cdot \frac{N_0/2}{\gamma_0 \cdot \|P\|^2} \quad \text{Ecuación 5.2.9}$$

$$r_{ee,0} \geq \frac{N_0/2}{\gamma_0 \cdot \|P\|^2} \quad \text{Ecuación 5.2.10}$$

Con igualdad si y sólo si $B(D)=G(D)$. Por tanto, el *MMSE* será entonces: $\sigma^2_{MMSE-DFE} = \frac{N_0/2}{\gamma_0 \cdot \|P\|^2}$. El filtro directo pasa a tener la siguiente expresión:

$$W(D) = \frac{G(D)}{\|P\| \cdot \gamma_0 \cdot G(D) \cdot G^H(D^{-H})} = \frac{1}{\|P\| \cdot \gamma_0 \cdot G^H(D^{-H})} \quad \text{Ecuación 5.2.11}$$

El último paso en la **Ecuación 5.2.10** procede de las observaciones siguientes:

$$r_{ee,0} = \left\| \frac{B}{G} \right\|^2 \cdot \frac{N_0/2}{\gamma_0 \cdot \|P\|^2} \quad \text{Ecuación 5.2.12}$$

El polinomio fraccionario dentro de la norma cuadrada es necesariamente mónico (tiene unos en la diagonal) y causal, y por tanto la norma cuadrada tiene un valor mínimo de 1. $\mathbf{B}(D)$ y $\mathbf{W}(D)$ especifican el *MMSE-DFE*, cuyo *filtro directo*, como ya se ha mencionado viene dado por:

$$\mathbf{W}(D) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\| \cdot \gamma_0 \cdot \mathbf{G}^H(D^{-H})} \quad \text{Ecuación 5.2.13}$$

(realizado con retardo, ya que es estrictamente no causal) y cuyo *filtro inverso* viene dado por:

$$\mathbf{B}(D) = \mathbf{G}(D) \quad \text{Ecuación 5.2.14}$$

Donde $\mathbf{G}(D)$ es el único factor canónico de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{Q}(D) + \frac{1}{\text{SNR}_{MFB}} = \gamma_0 \cdot \mathbf{G}(D) \cdot \mathbf{G}^H(D^{-H}) \quad \text{Ecuación 5.2.15}$$

Ecualizador Realimentado de Decisiones Forzador de Ceros (ZF-DFE)

Los filtros de realimentación hacia delante y hacia atrás del *ZF-DFE* se hallan estableciendo $\text{SNR}_{MFB} \rightarrow \infty$ en las expresiones del *MMSE-DFE*. La factorización espectral viene dada por la expresión:

$$\mathbf{Q}(D) = \eta_0 \cdot \mathbf{P}_c(D) \cdot \mathbf{P}_c^H(D^{-H}) \quad \text{Ecuación 5.2.16}$$

Que determina los filtros *ZF-DFE* como:

$$\mathbf{B}(D) = \mathbf{P}_c(D) \quad \text{Ecuación 5.2.17}$$

$$\mathbf{W}(D) = \frac{1}{\eta_0 \cdot \|\mathbf{p}\| \cdot \mathbf{P}_c^H(D^{-H})} \quad \text{Ecuación 5.2.18}$$

P_c se denomina a veces *respuesta canónica al pulso* para el canal. Como $q_0 = 1 = \eta_0 \cdot \|P_c\|^2$ entonces:

$$\eta_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} |p_{c,i}|^2} \quad \text{Ecuación 5.2.19}$$

La **Ecuación 5.2.19** muestra que hay una pérdida de potencia de señal de la relación del cuadrado de la primera magnitud en la respuesta canónica al pulso, con respecto a la norma cuadrada del resto de elementos.

Esta relación de pérdida se minimiza para un polinomio de fase mínima, y $P_c(D)$ es el equivalente de fase mínima a la respuesta al pulso del canal. El ruido a la salida del filtro de realimentación hacia delante tiene función de autocorrelación (blanca) $\frac{N_0}{2} / (\|p\|^2 \cdot \eta_0)$, por tanto:

$$\sigma_{ZF-DFE}^2 = \frac{\frac{N_0}{2}}{\|p\|^2 \cdot \eta_0} = \frac{\frac{N_0}{2}}{\|p\|^2} \cdot e^{\frac{-T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \ln(Q(e^{jwT})) dw} \quad \text{Ecuación 5.2.20}$$

La *SNR* correspondiente es entonces:

$$SNR_{ZF-DFE} = \eta_0 \cdot SNR_{MFB} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} p_{c,i}^2} \cdot SNR_{MFB} \quad \text{Ecuación 5.2.21}$$

3. Modelos de Canal Canónicos:

La simetría de la información mutua entre $X(D)$ (proceso de entrada) e $Y(D)$ (proceso de salida) sugiere dos interpretaciones de la relación entre $X(D)$ e $Y(D)$, conocidos como los modelos de canal canónicos, de la siguiente figura:

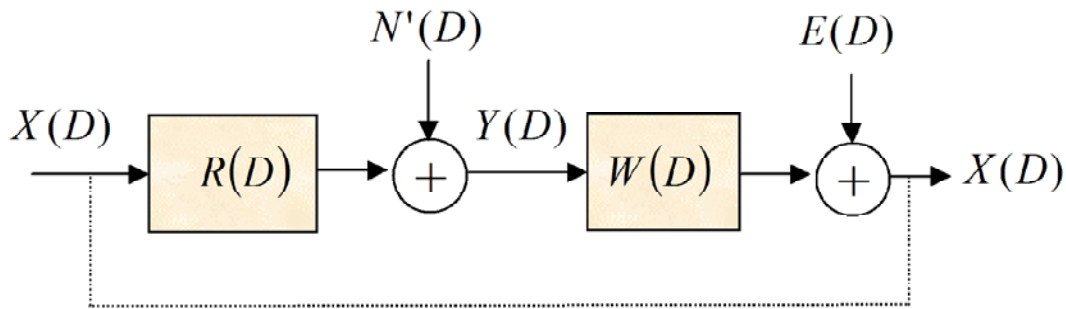


Figura 5: Modelos de canal canónicos para la misma información mutua

$$r(t) = p(t) * p^H(-t) \quad \text{Ecuación 5.3.1}$$

Donde:

$$R(D) = \sum_k r(KT) \cdot D^k \quad \text{Ecuación 5.3.2}$$

(corresponde a la formación del canal completo a la salida del filtro adaptado y muestreado).

Un canal canónico puede definirse como *aquel en el que la función lineal o matriz que caracteriza la ISI (o de forma más general, interferencia “de dimensión cruzada”) es igual a la función (o matriz) de autocorrelación de la interferencia aditiva independiente. La interferencia puede ser ruido gaussiano o alguna combinación de ruido gaussiano e ISI residual.*

Hay dos canales canónicos de interés:

1. **El modelo canónico directo (“forward”)** se define como:

$$Y(D) = R(D) \cdot X(D) + N'(D) \quad \text{Ecuación 5.3.3}$$

Donde $N'(D)$ es el ruido gaussiano a la salida del filtro adaptado en función de la autocorrelación $\frac{N_0}{2} \cdot R(D)$. Por tanto, la densidad espectral de potencia de ruido y el filtrado del canal tienen la misma forma $R(e^{-j\omega T})$. El primer término de la derecha en la **Ecuación 5.3.3** es la estimación *MMSE* de $Y(D)$ dado $X(D)$ y $N'(D)$, el *MMSE* y $X(D)$ son independientes.

2. **El modelo canónico inverso (“backward”)** es:

$$X(D) = W(D) \cdot Y(D) + E(D) \quad \text{Ecuación 5.3.4}$$

Donde (escalando el módulo por $\|p\|^{-1}$) $W(D)$ es el *MMSE-LE* y $E(D)$ es la secuencia de error *MMSE* para el *MMSE-LE*. El primer término de la derecha de la **Ecuación 5.3.4** es la estimación de $X(D)$ dado $Y(D)$. La forma del ecualizador y de la densidad espectral de potencia son ambos $Ree(e^{-j\omega T})$ ya que:

$$R_{ee}(D) = \frac{N_0}{2} / \left\{ \|p\|^2 \cdot Q(D) + \frac{N_0}{2} / (\epsilon_x \cdot \|p\|^2) \right\} = \frac{N_0}{2} \cdot W(D) \quad \text{Ecuación 5.3.5}$$

Los canales canónicos siempre exhiben una respuesta con la misma forma, como la del ruido aditivo gaussiano.

Es relativamente simple la construcción del DFE a partir de modelos canónicos. **Para el modelo directo**, el receptor procesa $Y(D)$ por la inversa del factor espectral anticausal de: $R(D) = (S_r \cdot G_r(D) \cdot G_r^H(D^{-H}))$ para obtener:

$$\frac{Y(D)}{S_r \cdot G_r^*(D^{-*})} = G_r(D) \cdot X(D) + N''(D) \quad \text{Ecuación 5.3.6}$$

Donde $N''(D)$ es ruido blanco gaussiano con energía por dimensión $\frac{N_0}{2} / S_r$.

Como $\mathbf{G}_r(\mathbf{D})$ es mónico (tiene unos en la diagonal), causal y de fase mínima, un *DFE* puede ser fácilmente implementado. Este *DFE* es el *ZF-DFE*. Un modelo canónico directo siempre producirá un *ZF-DFE*. El receptor no es óptimo en general, principalmente porque el *DFE* no es óptimo.

El DFE del modelo inverso permite definir el MMSE-DFE, notando que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}) + \frac{1}{\text{SNR}} = \|\mathbf{p}\|^2 \cdot \left[\mathbf{Q}(\mathbf{D}) + \frac{1}{\text{SNR}_{\text{MFB}}} \right] = \gamma_0 \cdot \|\mathbf{p}\|^2 \cdot \mathbf{G}(\mathbf{D})\mathbf{G}^H(\mathbf{D}^{-H})$$

Ecuación 5.3.7

Con $\mathbf{S}_0 = \gamma_0 \cdot \|\mathbf{p}\|^2$.

Además la acción del filtro de realimentación directo $\mathbf{W}(\mathbf{D})$ en la salida del filtro adaptado y muestreado $\mathbf{Y}(\mathbf{D})$ es:

$$\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{D})}{\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{G}^H(\mathbf{D}^{-H})} = \mathbf{G}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{D}) - \mathbf{G}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{D}) = \mathbf{G}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{D}) - \mathbf{E}'(\mathbf{D})$$

Ecuación 5.3.9

Donde $\mathbf{E}'(\mathbf{D})$ es la secuencia *MMSE* asociada con el *MMSE-DFE* y es blanca (y gaussiana cuando $\mathbf{X}(\mathbf{D})$ es gaussiano) y tiene energía por dimensión $\frac{N_0}{2}/\mathbf{S}_0$.

Los modelos canónicos del canal directo e inverso (“*forward*” y “*backward*”) tienen la misma información mutua entre entrada y salida. **En el modelo inverso**, $\mathbf{Y}(\mathbf{D})$ se considera la entrada y $\mathbf{X}(\mathbf{D})$ es la correspondiente salida, con $\mathbf{E}(\mathbf{D})$ como el ruido.

Ambos canales tienen el mismo máximo \bar{b} de la información mutua $\bar{I}(\mathbf{X}(\mathbf{D}); \mathbf{Y}(\mathbf{D}))$ y es el canal inverso el que describe la acción del receptor. La operación de decodificar o dividir en un receptor real (que usa decisiones previas para eliminar el esfuerzo del $\mathbf{G}_r(\mathbf{D})$ o $\mathbf{G}(\mathbf{D})$ mónico y causal a través de la realimentación de decisiones) en la **Ecuación 5.3.9** y la **Ecuación 5.3.8** tiene pérdidas de información en general, confirmando que los *DFE*’s en general no son detectores *ML* óptimos.

Sin embargo, sólo para el canal inverso, la $SNR_{mmse-dfe,u}$ es igual a $2^{2\bar{I}(X(D);Y(D))} - 1$ que es el valor máximo de SNR para el ruido blanco aditivo/distorsión del canal creada por el $MMSE-DFE$. Por tanto, las pérdidas de información en el $MMSE-DFE$ no causan una reducción en la tasa de datos alcanzable. Esta característica ocurre sólo para los modelos canónicos hacia atrás.

4. Relaciones entre los Receptores ZF-DFE y MMSE-DFE:

En algunas situaciones especiales, el $ZF-DFE$ y el $MMSE-DFE$ pueden inducir al mismo canal equivalente, aunque la actuación no será la misma.

El $MMSE-DFE$ resulta en el mismo canal equivalente que el $ZF-DFE$ bajo el water-filling, pero aún así actúa ligeramente mejor, a menos que el water-filling sea plano (es decir, que el canal sea plano).

Si la densidad espectral de potencia de ruido es la peor elección posible que minimiza la información mutua para el canal entonces el ZF y el $MMSE$ son los mismos, aunque el ruido sea distinto de cero.

5. Particionamiento Generalizado del Canal: El GDFE

Los sistemas *MMSE-DFE* dividen el canal en un conjunto infinito de subcanales *AWGN* donde cada uno de ellos lleva la misma cantidad de información.

En esta sección se investiga la división para un canal con paquetes de longitud finita caracterizado por la relación:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

Algunos modelos de \mathbf{H} podrían modelar la interferencia entre distintas antenas en transmisiones inalámbricas *MIMO*. Otros modelos podrían usarse para interferencias entre cables que comparten un medio físico común.

En resumen, el desarrollo *GDFE* permite cualquier \mathbf{H} y encuentra las particiones de actuación canónica correspondientes, abriendo nuevas vistas al concepto de “ecualización”, extendiéndolo a toda clase de interferencias lineales y proporcionando canónicamente, diseños para ellas.

Las divisiones pueden describirse y resumirse a través del concepto del *Generalized Decision Feedback Equalization* o el *GDFE*.

Algunas de las descomposiciones más generales para el *GDFE* pueden ser interesantes en sistemas de transmisión *MIMO*. Esos tipos de canales matriciales conducirán posiblemente a matrices que no son “*Toeplitz*” o a matrices convolución, para las cuales el tamaño y el rango son arbitrarios.

A continuación se va a estudiar la descomposición de la entrada al canal de acuerdo con una combinación de un espacio vectorial determinístico y dependiente del canal y un espacio aleatorio (de *Hilbert*) que se corresponde con la matriz de autocorrelación de la señal transmitida.

Habiendo establecido un canal canónico equivalente, el *GDFE* pasa fácilmente por la factorización canónica o de *Cholesky* de la secuencia de entrada. Lo que se hará, por tanto, será investigar la construcción de la entrada apropiada para obtener la mejor actuación del *GDFE*.

Descomposición del Paquete de Entrada al Canal:

El espacio de vectores de entrada puede dividirse en dos sub-espacios mutuamente ortogonales: Un espacio de paso P que contiene los vectores que pasarán a través del canal y un espacio nulo N que contiene los vectores de entrada que serán anulados por el canal.

En general, un vector de entrada puede tener componentes distintas, tanto en el espacio de paso como en el nulo, pero aquellas componentes del espacio nulo, pierden claramente la energía transmitida porque ninguna aparece en la salida del canal.

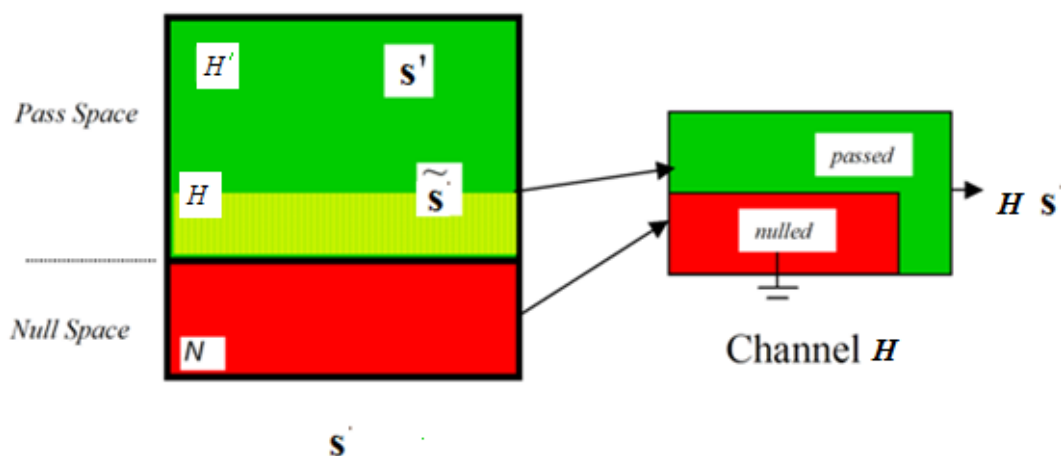


Figura 6: Descomposición de s en las componentes de paso y nula

Por tanto, sólo las componentes del espacio de paso transportarán información a través del canal. La conclusión que se obtiene es por tanto que la codificación en el espacio nulo del canal no incrementa la tasa de datos alcanzable.

En la siguiente figura se tiene el canal original y el canal equivalente, una vez eliminada la singularidad del canal:

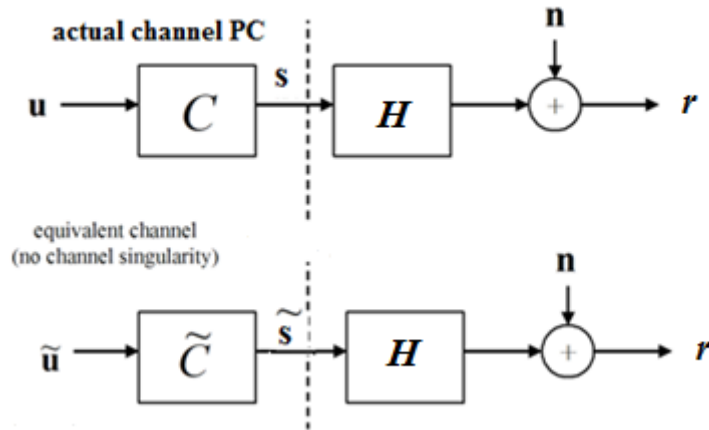


Figura 7: El canal original y su equivalente una vez eliminada la singularidad

El espacio de paso y el espacio nulo dependen sólo de la matriz de canal H . Sin embargo, los vectores de entrada son aleatorios, construidos a través de la modulación de una componente aleatoria u_n en cada uno de los vectores moduladores de transmisión fijos y determinísticos $u_n \cdot c_n$.

Por tanto, la reducción a \tilde{s} depende sólo de la parte fija de la entrada, denominada \tilde{C} . Los vectores proyectados \tilde{s} se expanden por sí mismos a un espacio vectorial aleatorio determinado (en el caso gaussiano) por $R_{\tilde{s}\tilde{s}}$.

Un segundo paso en la eliminación de la singularidad es el de eliminar cualesquiera singularidades en la autocorrelación de entrada. Estas singularidades pueden no estar relacionadas con el canal de espacio nulo, y podrían introducirse intencionadamente por diseño.

Canales Canónicos de Longitud Finita:

De aquí en adelante llamaremos a la entrada al canal no-singular construida para paquetes finitos s .

El desarrollo *GDFE* generaliza a vectores de ruido gaussianos n que no necesariamente tienen una matriz de autocorrelación diagonal:

$$R_{nn} = R_{nn}^{1/2} \cdot R_{nn}^{H/2} \quad \text{Ecuación 5.5.1}$$

El canal equivalente “ruido-blanco” se forma blanqueando el ruido:

$$\tilde{r} = R_{nn}^{-1/2} \cdot r = R_{nn}^{-1/2} \cdot (H \cdot s + n) = \tilde{H} \cdot s + \tilde{n} \quad \text{Ecuación 5.5.2}$$

Donde $\tilde{H} = R_{nn}^{-1/2} \cdot H$ y \tilde{n} es ruido blanco con varianza unidad por dimensión compleja.

El ruido filtrado \tilde{n} permanece independiente de la entrada s . El receptor podría procesar la señal recibida mediante un conjunto de filtros adaptados (las filas de \tilde{H}) sin pérdida de información para obtener el modelo de canal canónico directo:

$$z = \tilde{H}^* \cdot \tilde{H} \cdot s + \tilde{H}^H \cdot \tilde{n} = R_f \cdot s + n' \quad \text{Ecuación 5.5.3}$$

Una estimación *MMSE* de s dado z se halla a través del modelo de canal canónico inverso

$$s = R_b \cdot z + e \quad \text{Ecuación 5.5.4}$$

Donde R_b es la matriz del estimador *MMSE* (ecualizador):

$$R_b = R_{sz} \cdot R_{zz}^{-1} \quad \text{Ecuación 5.5.5}$$

El vector \mathbf{e} es el vector de error *MMSE* para la estimación *MMSE* de \mathbf{s} dado \mathbf{z} :

$$\mathbf{R}_{ee} = \mathbf{R}_b; \quad I(\mathbf{s}; \mathbf{z}) = I(\mathbf{s}; \mathbf{r}) \quad \text{Ecuación 5.5.6}$$

Los nuevos canales entre \mathbf{s} y \mathbf{z} llevan toda la información pertinente entre la entrada del canal y la salida. Ambos canales canónicos tienen la misma información mutua. La transmisión desde \mathbf{s} hasta \mathbf{z} tiene la misma actuación que de \mathbf{z} a \mathbf{s} .

Desarrollo Generalizado de Decisiones Realimentadas:

El **GDFE** explota la estructura en los modelos de canal canónicos. Como se ha comentado previamente, el modelo canónico inverso es:

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad \text{Ecuación 5.5.4}$$

Donde \mathbf{R}_b es no-singular a causa de la eliminación previa de las dimensiones singulares para obtener $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{z}$. La inversa del espectro *MMSE* \mathbf{R}_b^{-1} tiene Factorización Cholesky:

$$\mathbf{R}_b^{-1} = \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{G} \quad \text{Ecuación 5.5.7}$$

Donde \mathbf{G} es triangular superiormente y mónica (tiene unos a lo largo de la diagonal) y \mathbf{S}_0 es una matriz diagonal de factores *Cholesky* positivos. Por tanto:

$$\mathbf{R}_b^{-1} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \quad \text{Ecuación 5.5.8}$$

La premultiplicación de \mathbf{s} por \mathbf{G} produce:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{e}' = \mathbf{z}' + \mathbf{e}' \quad \text{Ecuación 5.5.9}$$

Donde $\mathbf{e}' = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}$ tiene una matriz de autocorrelación \mathbf{S}_0 y \mathbf{z}' es la salida de un filtro de matriz directa $\mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H}$, actuando sobre la salida del filtro adaptado \mathbf{z} .

De nuevo, la información mutua se mantiene porque la matriz triangular \mathbf{G} es uno a uno. El vector de entrada al canal \mathbf{s} se puede recuperar a partir de:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{e}' \quad \text{Ecuación 5.5.10}$$

Una descripción detallada viene dada por la expresión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}'_{N_T-1} \\ \mathbf{z}'_{N_T-2} \\ \vdots \\ \mathbf{z}'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{g}_{N_T-1,N_T-2} & \cdots & \mathbf{g}_{N_T-1,0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{g}_{N_T-2,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{N_T-1} \\ \mathbf{s}_{N_T-2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_{N_T-1} \\ \mathbf{e}'_{N_T-2} \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.5.11

Las ecuaciones de “realimentación de decisiones” son:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_0 &= \mathbf{Q}_0(\mathbf{z}'_0) \\ \hat{\mathbf{s}}_1 &= \mathbf{Q}_1(\mathbf{z}'_1 - \mathbf{g}_{1,0} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \\ \hat{\mathbf{s}}_2 &= \mathbf{Q}_2(\mathbf{z}'_2 - \mathbf{g}_{2,1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_1 - \mathbf{g}_{2,0} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \\ \hat{\mathbf{s}}_{N_T-1} &= \mathbf{Q}_{N_T-1} \left(\mathbf{z}'_{N_T-1} - \sum_{i=0}^{N_T-2} \mathbf{g}_{N_T-1,i} \cdot \hat{\mathbf{s}}_i \right) \end{aligned}$$

Ecuación 5.5.12

Donde la operación \mathbf{Q}_i es una detección símbolo a símbolo para cualquier constelación que se use en el i -ésimo símbolo transmitido $\mathbf{s}_i, i = 0, \dots, N_T - 1$. A causa de esta “fragmentación” símbolo a símbolo la realimentación de decisiones es subóptima (es decir, no es un detector de máxima verosimilitud para el símbolo completo), pero se implementa de forma recursiva y simple.

Los filtros de realimentación son una función del índice de muestreo temporal y representan una sección de realimentación variante con el tiempo periódicamente, del DFE. Este periodo es el periodo de símbolo.

Este receptor se llama **DFE Generalizado o GDFE**, cuyo esquema se muestra a continuación:

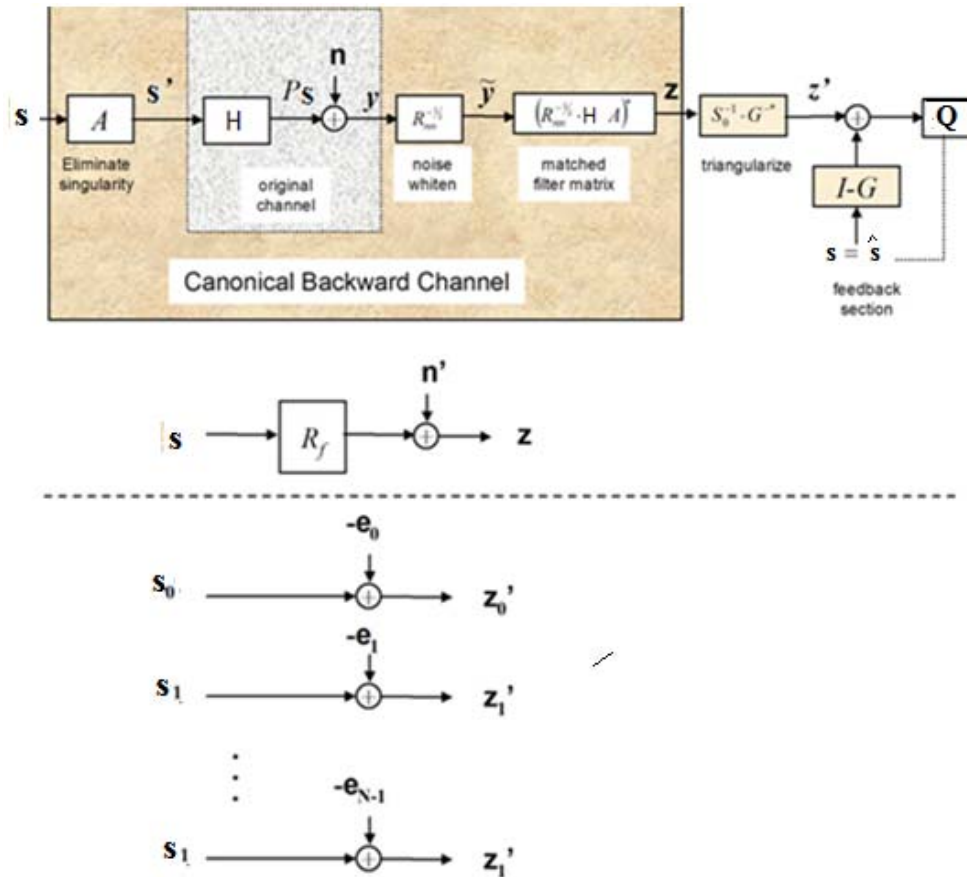


Figura 8: DFE Generalizado

Donde $A=I$ y por tanto $s=s'$. H representa la función de transferencia del canal como hemos venido denominando.

Cuando s no sea blanca, puede relacionarse con una señal blanca que lleve la información, conduciendo a varios casos especiales.

GDFE-ZF:

La versión *ZF* de cualquier diseño *MMSE*, incluido el *GDFE*, se obtiene asumiendo que no hay ruido en la solución *MMSE*. Debido a que podría haber una multitud de estructuras *MMSE* equivalentes y todas tienen la misma actuación *MMSE*, debe tenerse cuidado a la hora de asumir que todos los *ZF-GDFEs* tienen la misma actuación frente al ruido.

Para cualquier *GDFE* dado, el equivalente *ZF* usa el modelo de canal directo para derivar un *ZF-GDFE*. La salida del canal hacia delante z es de nuevo una factorización *Cholesky* de:

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_f^H \cdot \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{H}_f \quad \text{Ecuación 5.5.13}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}_f^H \cdot \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{H}_f \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n}' \quad \text{Ecuación 5.5.14}$$

El receptor puede procesar z con $\mathbf{S}_f^{-1} \cdot \mathbf{H}_f^{-H}$ para obtener:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{S}_f^{-1} \cdot \mathbf{H}_f^{-H} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{H}_f \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n}'' \quad \text{Ecuación 5.5.15}$$

Ignorando el ruido \mathbf{n}'' como si fuese cero, produce un conjunto triangular de ecuaciones (ya que \mathbf{H}_f es triangular superiormente):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_0 &= \mathbf{Q}_0(\mathbf{z}'_0) \\ \hat{\mathbf{s}}_1 &= \mathbf{Q}_1(\mathbf{z}'_1 - \mathbf{h}_{f,1,0} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \\ \hat{\mathbf{s}}_2 &= \mathbf{Q}_2(\mathbf{z}'_2 - \mathbf{h}_{f,2,1} \cdot \hat{\mathbf{s}}_1 - \mathbf{h}_{f,2,0} \cdot \hat{\mathbf{s}}_0) \\ \hat{\mathbf{s}}_{N_T-1} &= \mathbf{Q}_{N_T-1} \left(\mathbf{z}'_{N_T-1} - \sum_{i=0}^{N_T-2} \mathbf{h}_{f,N_T-1,i} \cdot \hat{\mathbf{s}}_i \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ecuación 5.5.16}$$

El conjunto de ecuaciones proporciona una estimación de la secuencia transmitida, pero la SNR conjunta (que es insesgada) es menor que o igual a $2^{2\bar{I}(x;y)} - 1$. A menudo, el *ZF-GDFE* puede tener una actuación muy cercana al *MMSE-GDFE*, con mayor nivel de SNR.

Precodificador para el GDFE

La precodificación en el *DFE* convencional evita la propagación de errores esencialmente moviendo la sección de realimentación al transmisor, como se verá en el Capítulo 7.

Los símbolos de longitud finita en el *GDFE* previenen ráfagas de errores que exceden la longitud de un símbolo. Por tanto, podría haber menos necesidad de un precodificador para el *GDFE* porque cualquier propagación de error saltará con probabilidad 1 al límite de símbolo, a diferencia del *DFE* convencional que puede tener infinitas ráfagas de error (y ráfagas de error muy largas, con probabilidad incrementalmente pequeña). Por tanto, por razones de actuación y de propagación de error, el *GDFE* podría ser preferible en implementación.

No obstante, el diseño en transmisión podría usar precodificación para eliminar incluso propagación de error dentro de un símbolo. Las filas de la sección de realimentación ahora varían con el índice n de subcanal.

NOTA: La actuación *ZF-GDFE* es posible sólo si la matriz \mathbf{H} es cuadrada y no singular.

Capítulo 6: Relación entre V-BLAST y GDFE:

George Ginis y John M. Cioffi [30] demuestran que el procesamiento en recepción de la arquitectura *Vertical Bell Labs Layered Space-Time* (V-BLAST) podría verse como un Ecualizador Realimentado de Decisión (GDFE) cuando se aplica a un canal *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO). Se ha probado que, dependiendo del criterio elegido para reducir la interferencia, las operaciones de recepción del sistema V-BLAST son fundamentalmente equivalentes tanto para el GDFE Forzador de Ceros (ZF) como para el GDFE de Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE).

1. Introducción

El Ecualizador Realimentado de Decisión Generalizado (GDFE) es una generalización de la conocida idea de la realimentación de decisión al caso del vector de transmisión y es capaz de aproximar la comunicación limitada superiormente por la teoría de la información.

La arquitectura V-BLAST ha sido propuesta para obtener muy altas eficiencias espectrales sobre canales inalámbricos con alta dispersión.

A continuación, se va a proceder a comprobar que el procesado de recepción V-BLAST puede interpretarse como un caso especial del GDFE. Aunque este resultado se concibe generalmente como verdadero, los autores no han encontrado ninguna prueba prioritaria en la literatura. La adopción de esta visión alternativa tiene ciertos beneficios: proporciona una visión más profunda teniendo en cuenta las funciones de V-BLAST, proporciona una unión entre V-BLAST y el vasto conocimiento acumulado de los DFE's, y produce fácilmente una descomposición en sub-canales paralelos que simplifican los cálculos de SNR y capacidad.

2. GDFE

La salida muestreada de un sistema *MIMO* de banda estrecha con igual número de elementos receptores y transmisores, satisface:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad \text{Ecuación 6.2.1}$$

Donde \mathbf{r} , \mathbf{s} y \mathbf{n} son vectores de las muestras de salida, los símbolos transmitidos y las muestras de ruido, respectivamente. Se asume que el ruido es blanco, gaussiano, con varianza $N_0/2$. Además \mathbf{H} es una matriz no singular $N_T \times N_R$ con el elemento h_{ij} denotando la ganancia compleja del elemento transmisor j al elemento receptor i .

La estructura de ecualización *GDFE* es la siguiente:

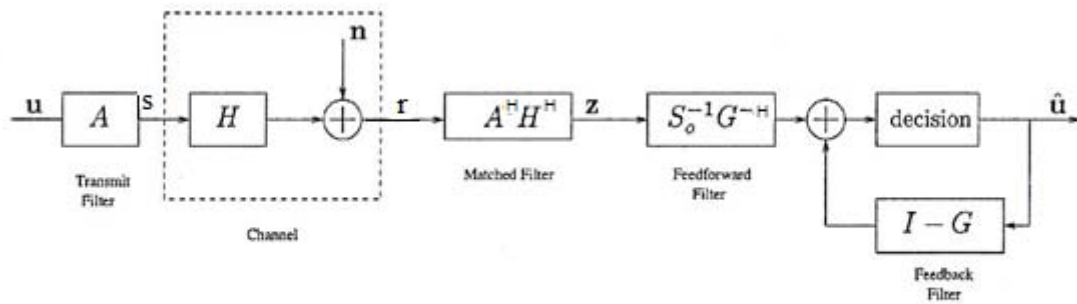


Figura 9: Estructura de ecualización GDFE

Aunque el *GDFE* en general incluye filtrado en transmisión, aquí se asume que $A=I$ así que $\mathbf{u}=\mathbf{s}$ y $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{s}}$. De la **Ecuación 6.2.1** se obtiene el modelo canónico hacia delante:

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad \text{Ecuación 6.2.2}$$

Donde $\mathbf{z} = \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{r}$, $\mathbf{R}_f = \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H}$, $\mathbf{n}' = \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{n}$ y la covarianza de ruido es:

$$\mathbf{R}_{nn} = \left(\frac{N_0}{2}\right) \cdot \mathbf{R}_f \quad \text{Ecuación 6.2.3}$$

El modelo canónico hacia detrás se obtiene derivando la estimación *MMSE* de s dado z :

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad \text{Ecuación 6.2.4}$$

Donde $\mathbf{R}_b = \mathbf{R}_{uu} \cdot \mathbf{R}_{zz}^{-1}$ y \mathbf{e} es el error *MMSE*. Se puede demostrar que

$$\mathbf{R}_b^{-1} = \mathbf{R}_f + \left(\frac{N_0}{2}\right) \cdot \mathbf{R}_{ss}^{-1} \text{ y } \mathbf{R}_{ee} = \mathbf{R}_b \quad \text{Ecuación 6.2.5}$$

GDFE/ZF

La factorización *Cholesky* $\mathbf{R}_f = \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{G}$ se deriva primero donde \mathbf{S}_0 es diagonal con elementos positivos y \mathbf{G} es triangular superior y mónica (es decir, tiene unos en la diagonal). El procesado de z por la matriz triangular inferior $\mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H}$ nos lleva a:

$$\mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} + \check{\mathbf{e}} \quad \text{Ecuación 6.2.6}$$

Donde $\mathbf{R}_{\check{\mathbf{e}}\check{\mathbf{e}}} = \left(\frac{N_0}{2}\right) \cdot \mathbf{S}_0^{-1}$ es diagonal. Como \mathbf{G} es triangular superior y $\check{\mathbf{e}}$ tiene componentes incorreladas, s puede recuperarse por sustitución combinada con detección símbolo a símbolo.

El procedimiento de ecualización se describe a continuación:

Algoritmo GDFE:

$$\hat{\mathbf{z}} := \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{r}$$

for $k = 0$ **to** $N_T - 1$

$$\hat{s}_{N_T-k} := \text{decision} \left(\hat{\mathbf{z}}_{N_T-k} - \sum_{j=1}^k \mathbf{g}_{N_T-k, N_T-k+j} \cdot \hat{s}_{N_T-k+j} \right)$$

End

Donde \hat{s}_i y \hat{z}_i son los elementos i -ésimos de $\hat{\mathbf{s}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ respectivamente. Una simplificación mayor es posible usando la descomposición \mathbf{QR} : $\mathbf{H}=\mathbf{QR}$, donde \mathbf{Q} es unitaria y \mathbf{R} es triangular superior.

Por tanto, $\mathbf{R}_f = \mathbf{R}^H \cdot \mathbf{R}$ y $\mathbf{S}_0^{1/2} = \text{diag}(r_{11}^q, r_{22}^q, \dots, r_{N_T N_R}^q)$ donde r_{ij}^q son los elementos de \mathbf{R} . Además $\mathbf{G} = \mathbf{S}_0^{-1/2} \cdot \mathbf{R}$ y los elementos de \mathbf{G} son $g_{ij} = \frac{r_{ij}^q}{r_{ii}^q}$.

El filtro combinado de entrada es:

$$\mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \cdot \mathbf{H}^H = \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{S}_0^{1/2} \cdot \mathbf{R}^{-H} \cdot \mathbf{R}^H \cdot \mathbf{Q}^H = \mathbf{S}_0^{-1/2} \cdot \mathbf{Q}^H \quad \text{Ecuación 6.2.7}$$

Que puede interpretarse como una operación de rotación/reflexión por \mathbf{Q}^H seguida de una operación de escalado llevada a cabo por $\mathbf{S}_0^{-1/2}$.

GDFE/MMSE:

Para implementar el *GDFE/MMSE* se parte del modelo canónico hacia atrás (“*backward*”). Se realiza la factorización *Cholesky* de $\mathbf{R}_b^{-1} = \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{G}$, donde \mathbf{S}_0 y \mathbf{G} tienen las mismas propiedades que antes. Todos los desarrollos y resultados se mantienen exactamente igual que para el caso *ZF*, excepto por el hecho de que la estructura no puede simplificarse usando la descomposición \mathbf{QR} . El *GDFE/MMSE* siempre consigue una *SNR* mayor que el *GDFE/ZF*.

3. V-BLAST

Con *V-BLAST*, los símbolos se detectan secuencialmente. Antes de la detección de un símbolo, la interferencia de los símbolos previamente detectados es sustraída y los elementos del vector recibido tienen unos pesos lineales para anular (o reducir) la interferencia de los símbolos todavía no detectados.

Asumimos que el canal se describe de nuevo mediante la **Ecuación 6.2.1** y $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_{N_T}]$. El algoritmo de detección es el siguiente:

Algoritmo V-BLAST:

$\mathbf{v}_1 := \mathbf{r}$
for $k = 0$ **to** $N_T - 1$
 $\hat{\mathbf{s}}_{N_T-k} := \text{decision}(\mathbf{w}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{v}_{k+1})$
 $\mathbf{v}_{k+2} = \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{h}_{N_T-k} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{N_T-k}$
End

(Las operaciones de reordenación pueden tenerse en cuenta reorganizando las filas y columnas de \mathbf{H}). El vector \mathbf{w}_{N_T-k} llevando a cabo el peso lineal de los elementos de \mathbf{v}_{k+1} , se elige para satisfacer tanto el criterio *ZF* como el *MMSE*.

V-BLAST/ZF:

Con el criterio *ZF*, la interferencia de los símbolos aún no detectados se anula. Esto se expresa de forma compacta por:

$$\mathbf{H}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{w}_{N_T-k} = \mathbf{c}_{N_T-k}, k = 0, \dots, N_T - 1 \quad \text{Ecuación 6.3.1}$$

Donde $\mathbf{H}_{N_T-k} = [\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_{N_T-k}]$ (rango completo para cualquier k) y \mathbf{c}_i es un vector columna ix1 con su i-ésimo vector elemento igual a 1 y todos los demás elementos 0. La solución de norma menor (y por tanto la minimización del ensalzamiento del ruido) de la **Ecuación 6.3.1** es:

$$\mathbf{w}_{N_T-k} = \mathbf{H}_{N_T-k} \cdot (\mathbf{H}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{H}_{N_T-k})^{-1} \cdot \mathbf{c}_{N_T-k} \quad \text{Ecuación 6.3.2}$$

Es posible una simplificación mayor con la descomposición **QR** de \mathbf{H}_{N_T-k} . Por tanto,

$$\mathbf{H}_{N_T-k} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_{N_T-k}, \quad \mathbf{R}_{N_T-k} = \begin{bmatrix} r_1^q & r_2^q & \dots & r_{N_T-k_1}^q \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 6.3.3}$$

y la estructura triangular superior de \mathbf{R} implica que:

$$\mathbf{R}_{N_T-k} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(N_T-k)(N_T-k)} \\ \mathbf{0}_{k \times (N_T-k)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}'_{N_T-k} \quad \text{Ecuación 6.3.4}$$

Donde \mathbf{R}'_{N_T-k} representa las N_T-k filas superiores de \mathbf{R}_{N_T-k} .

La **Ecuación 6.3.2** se convierte en:

$$\mathbf{w}_{N_T-k} = \mathbf{q}_{N_T-k} \cdot \frac{1}{(\mathbf{r}_{N_T-k, N_T-k}^q)^H} \quad \text{Ecuación 6.3.5}$$

Donde \mathbf{q}_i es la i-ésima columna de \mathbf{Q} .

V-BLAST/MMSE:

Con el criterio *MMSE*, el objetivo es minimizar la varianza del error entre el símbolo transmitido y la estimación del receptor, que conduce al siguiente requisito de ortogonalidad:

$$\epsilon\{s_{N_T-k} \cdot v_{k+1}^H\} = w_{N_T-k}^H \cdot \epsilon\{v_{N_T-k} \cdot v_{k+1}^H\} \quad \text{Ecuación 6.3.6}$$

Asumiendo que las decisiones son correctas con una probabilidad muy alta, $\hat{s}_{N_T-k} = s_{N_T-k}$ y $v_{k+1} = \sum_{j=1}^{N_T-k} h_j \cdot s_j + n$. Con los símbolos transmitidos siendo blancos con varianza ϵ_s :

$$\epsilon\{s_{N_T-k} \cdot v_{k+1}^H\} = \epsilon_s \cdot h_{N_T-k}^H \quad \text{Ecuación 6.3.7}$$

$$\epsilon\{v_{N_T-k} \cdot v_{k+1}^H\} = \epsilon_s \cdot \sum_{j=1}^{N_T-k} h_i \cdot h_j^H + \frac{N_0}{2} \cdot I \quad \text{Ecuación 6.3.8}$$

Y finalmente:

$$w_{N_T-k}^H = h_{N_T-k}^H \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_T-k} h_j \cdot h_j^H + \frac{1}{SNR} \cdot I \right)^{-1} \quad \text{Ecuación 6.3.9}$$

4. Equivalencia de las Operaciones Receptoras entre V-BLAST y GDFE

Se demuestra mediante prueba la equivalencia de los procesamientos receptores de *V-BLAST* y *GDFE*, obteniendo que las operaciones ejecutadas son idénticas y asumiendo que la ordenación de los sub-flujos recibidos es la misma para ambos algoritmos. Las pruebas difieren dependiendo de si se usa el criterio *MMSE* o *ZF*.

Caso ZF:

Empleando el hecho $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{r} - \sum_{i=1}^k \mathbf{h}_{N_T-k+i} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{N_T-k+i}$ la operación fundamental del algoritmo *V-BLAST* es:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{w}_{N_T-k}^H \cdot \left(\mathbf{r} - \sum_{i=1}^k \mathbf{h}_{N_T-k+i} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{N_T-k+i} \right) \quad \text{Ecuación 6.4.1}$$

Renombrando:

$$\hat{\mathbf{z}}_{N_T-k} = \frac{1}{r_{N_T-k, N_T-k}^q} \cdot \mathbf{q}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{r} \quad \text{Ecuación 6.4.2}$$

Y substituyendo con la Ecuación 6.3.5, la Ecuación 6.4.1 pasa a ser:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{v}_{k+1} = \hat{\mathbf{z}}_{N_T-k} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_{N_T-k, N_T-k}^q} \cdot \mathbf{q}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{h}_{N_T-k+i} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{N_T-k+i}$$

Ecuación 6.4.3

Dando el resultado:

$$\mathbf{q}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{h}_{N_T-k+i} = \mathbf{q}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_{N_T-k+i}^q = r_{N_T-k, N_T-k+i}^q \quad \text{Ecuación 6.4.4}$$

Y la $g_{ij} = \frac{r_{i,j}^q}{r_{i,i}^q}$ se deduce que:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{v}_{k+1} = \hat{\mathbf{z}}_{N_T-k} - \sum_{i=1}^k g_{N_T-k, N_T-k+i} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{N_T-k+i} \quad \text{Ecuación 6.4.5}$$

Esta ecuación prueba que tanto *V-BLAST/ZF* como *GDFE/ZF* toman decisiones con exactamente las mismas entradas. Por tanto, los métodos son equivalentes y la post-detección de *SNR* correspondiente es igual.

Caso MMSE:

Empezando con la **Ecuación 6.3.9** y haciendo uso de

$$\mathbf{H}_{N_T-k} = \mathbf{H} \left[\mathbf{I}_{N_T-k \times N_T-k} \mathbf{O}_{k \times (N_T-k)} \right]^T \quad \text{Ecuación 6.4.6}$$

Uno encuentra:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H = \mathbf{c}_{N_T-k}^T \left\{ \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{\text{SNR}} \right) \cdot \mathbf{I} \right\}^{-1} \cdot \mathbf{H}^H \quad \text{Ecuación 6.4.7}$$

Donde \mathbf{c}_{N_T-k} tiene la misma interpretación que antes, pero ahora tiene tamaño $N_T \times 1$. Utilizando el hecho de que:

$$\mathbf{R}_b^{-1} = \mathbf{R}_f + \frac{1}{\text{SNR}} \cdot \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{\text{SNR}} \cdot \mathbf{I} \quad \text{Ecuación 6.4.8}$$

La **Ecuación 6.4.2.2** pasa a ser:

$$\mathbf{w}_{N-k}^H = \mathbf{c}_{N-k}^T \cdot \left\{ \left(\mathbf{G}^H \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{G} - \frac{1}{\text{SNR}} \cdot \mathbf{I} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{\text{SNR}} \right) \cdot \mathbf{I} \right\}^{-1} \cdot \mathbf{H}^H \quad \text{Ecuación 6.4.9}$$

Donde $\mathbf{S}_0 = \text{diag}(\mathbf{S}_{0,1}, \mathbf{S}_{0,2})$ y:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{0}_{k \times (N_T-k)} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 6.4.10}$$

Donde $\mathbf{S}_{0,1}, \mathbf{S}_{0,2}$ son diagonales con dimensiones $(N_T-k) \times (N_R-k)$ y $k \times k$ respectivamente; $\mathbf{G}_{11}, \mathbf{G}_{22}$ son triangulares superiores con dimensiones $(N_T-k) \times (N_R-k)$ y $k \times k$ respectivamente; y \mathbf{G}_{12} es $(N_T-k) \times k$. Por tanto, se deriva lo siguiente:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H = \mathbf{c}_{N_T-k}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^H \cdot \mathbf{S}_{0,1} \cdot \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{12}^H \cdot \mathbf{S}_{0,1} \cdot \mathbf{G}_{11} & \frac{1}{SNR} \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \mathbf{H}^H$$

Ecuación 6.4.11

Empleando la fórmula de inversión de matriz bloque:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^H \cdot \mathbf{S}_{0,1} \cdot \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{12}^H \cdot \mathbf{S}_{0,1} \cdot \mathbf{G}_{11} & \frac{1}{SNR} \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_{0,1}^H \cdot \mathbf{G}_{11}^{-H} & \mathbf{0} \\ -SNR \cdot \mathbf{G}_{12}^H \cdot \mathbf{G}_{11}^{-H} & SNR \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Ecuación 6.4.12

La **Ecuación 6.4.11** ahora pasa a ser:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H = \mathbf{c}_{N_T-k}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_{0,1}^H \cdot \mathbf{G}_{11}^{-H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 6.4.13}$$

Como \mathbf{G}_{11}^{-1} es mónica (tiene unos en la diagonal), se deduce que:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H = \mathbf{c}_{N_T-k}^T \cdot \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \cdot \mathbf{H}^H \quad \text{Ecuación 6.4.14}$$

La operación fundamental del *V-BLAST/MMSE* se examina a continuación. Sabiendo que $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{r}$:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H = \mathbf{c}_{N_T-k}^T \cdot \left(\hat{\mathbf{z}} - \sum_{i=1}^k \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H} \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{N_T-k+i} \right) \quad \text{Ecuación 6.4.15}$$

Sustituyendo $\mathbf{H}^H \cdot \mathbf{H}$, tenemos:

$$\mathbf{w}_{N_T-k}^H \cdot \mathbf{v}_{k+1} = \hat{\mathbf{z}}_{N_T-k} - \sum_{i=1}^k \mathbf{g}_{N_T-k, N_T-k+i} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{N_T-k+i} \quad \text{Ecuación 6.4.16}$$

Por tanto, resulta evidente que las decisiones de entrada tanto para *V-BLAST/MMSE* como para *GDFE/MMSE* son exactamente las mismas. Las técnicas son equivalentes y resultan en la misma post-detección de *SNR*.

5. Conclusiones

Por tanto, se prueba que el procesado de recepción *V-BLAST* es equivalente a las operaciones del *GDFE*, proporcionando por tanto una perspectiva distinta en la altamente conocida capacidad del sistema multi-antena. Es importante resaltar que la equivalencia de la actuación, descansa en la asunción de que *GDFE* emplea una reordenación de los sub-flujos recibidos (una característica inherente de *V-BLAST*) y que no hay optimización en la transmisión.

Capítulo 7: Transmisión Espacio-Tiempo usando la Pre-codificación Tomlinson Harashima

En este capítulo, se propone la pre-codificación Tomlinson-Harashima [22], [23], una técnica de pre-codificación no lineal, para transmitir sobre canales Multiple-Input Multiple-Output (*MIMO*). En lugar de ecualizar la interferencia intersimbólica (ecualización temporal), en este caso se emplea ecualización espacial en el “transmisor”, por ejemplo, ecualización de la interferencia multi-usuario, o una combinación de ecualización espacial/temporal. Se muestra que esta pre-codificación *MIMO* (como su homólogo *SISO*) ofrece unas ventajas significativas frente a la pre-ecualización lineal y frente a la ecualización realimentada de decisiones, como se hace en los esquemas de tipo *BLAST*. Usando la codificación de canal, la pre-codificación *MIMO* es capaz de alcanzar eficiencias más grandes para potencias más altas y menores retardos de codificación que otros esquemas.

1. Introducción:

Bajo estudios de Teoría de la Información de los canales *MIMO* [11], [12], [13], [14], [15], se han hecho numerosos trabajos para proponer receptores flexibles para varios escenarios prácticos. La principal dificultad para transmitir sobre canales *MIMO* es la separación o ecualización de los flujos paralelos de datos, por ejemplo, la recuperación de los componentes del vector transmitido \mathbf{x} que interfieren en el lado del receptor.

La estrategia más obvia para separar los flujos de datos es, como se ha mencionado en capítulos anteriores, la ecualización lineal en el lado del receptor. Aquí, el vector de decisión se genera mediante:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}_{(t)}^{\dagger} \cdot \mathbf{r} \quad \text{Ecuación 7.1.1}$$

Donde $\mathbf{H}^\dagger_{(l)}$ denota la pseudo-inversa izquierda de la matriz de canal \mathbf{H} . Es ampliamente conocido que la ecualización lineal presenta ensalzamiento de ruido e incluso tiene poca eficiencia espectral. Esta desventaja puede salvarse mediante ecualización espacial de decisiones realimentadas (*DFE*) [10], [3]. Desafortunadamente, en el *DFE* puede producirse propagación de errores. Además, desde que se requieren decisiones inmediatas, la aplicación de codificación de canal requiere algún intercalado inteligente que a cambio introduce un retardo significativo. Finalmente, los detectores (Turbo) iterativos han sido presentados por varios autores [16], [17], [18].

Los métodos anteriores requieren información estática de canal (*CSI*) sólo en el lado del receptor. Si *CSI* está (en parte) también disponible en el transmisor, los usuarios pueden separarse por medio de pre-ecualización. Asumiendo *CSI* perfecta en el transmisor, la interferencia de los usuarios en el receptor puede evitarse completamente mediante una multiplicación del vector de datos \mathbf{u} con la inversa (pseudo) derecha directamente sobre el canal ($\mathbf{s}=\mathbf{u}$), la versión pre-distorsionada $\mathbf{s} = \mathbf{H}^\dagger_{(l)} \cdot \mathbf{u}$ se alimenta en el canal. Sin embargo, esta pre-ecualización lineal forzadora de ceros (*ZF*) padece de la misma pérdida de eficiencia en potencia que la ecualización lineal en el lado receptor. Aquí, en lugar de ensalzar el ruido, la potencia transmitida media se incrementa por el mismo factor.

Finalmente, la tarea de ecualización del canal puede dividirse entre el transmisor y el receptor. Una estrategia popular se basa en la Descomposición en Valores Singulares (*SVD*) de la matriz de canal \mathbf{H} , por ejemplo, escribiéndola como $\mathbf{H} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}$ donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices unitarias y $\mathbf{\Sigma}$ es diagonal. Aplicando \mathbf{V}^H en el transmisor y \mathbf{U}^H en el receptor independiente, los canales paralelos son generados [19], [20]. Aquí, en contraste con la (pre)ecualización lineal, ni se incrementa la potencia transmitida ni se ensalza el ruido del canal.

La ecualización espacial en los sistemas *MIMO* (con matriz de canal \mathbf{H}) está estrechamente relacionada con la ecualización temporal para la transmisión en los sistemas Single-Input Single-Output (*SISO*) sobre canales con interferencia intersimbólica (*ISI*) (Función de transferencia de canal $\mathbf{H}(z)$). Cada estrategia de Ecualización tiene su homólogo directo en el otro dominio. Las analogías se representan en la tabla mostrada a continuación:

		Canal ISI $H(z)$ (<i>ecualización temporal</i>)	Canal MIMO H (<i>ecualización temporal</i>)
LINEAL	En el Receptor	Ecualización Lineal vía $1/H(z)$	Ecualización Lineal vía $H^{\dagger}_{(l)}$
	En el Transmisor	Pre-Ecualización Lineal vía $1/H(z)$	Pre-Ecualización
	En el Transmisor/Receptor	OFDM/DMT, codificación vectorial	SVD
	En el Receptor	DFE	Matriz DFE
NO LINEAL	En el Transmisor/Receptor	Pre-Codificación Tomlinson-Harashima	Premodificación para canales MIMO

Tabla 1

Las correspondencias para la ecualización lineal en el receptor y la pre-ecualización en el transmisor son inmediatas. La *SVD* para los canales *MIMO* se puede identificar con la transmisión “*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*” (*OFDM*) o “*Discrete MultiTone*” (*DMT*), sobre canales con *ISI*. Para ser precisos, la *SVD* corresponde a una estrategia llamada *codificación vectorial* [21], donde los bloques de símbolos consecutivos son procesados en el transmisor y receptor basándose en los autovectores de algunas matrices de canal. En ambos casos, se lleva a cabo una partición de los canales subyacentes en sub-canales independientes y paralelos, que es también el concepto teórico usado cuando se calcula la capacidad de canal.

La ecualización de decisiones realimentadas es una estrategia de ecualización no lineal en el lado del receptor. Su homólogo para los canales *MIMO* es una matriz *DFE* para ecualización espacial. En la transmisión *SISO*, la parte de realimentación del *DFE* puede ser transferida al transmisor, conduciendo a un esquema conocido como **Pre-Codificación Tomlinson-Harashima (THP)**. Es ampliamente conocido que

desperdiciando una muy pequeña cantidad en potencia media transmitida, la actuación del *DFE* y del *THP* es la misma, pero como *THP* es una técnica de transmisión, la propagación de errores en el receptor se evita. Además, los esquemas de codificación de canal pueden aplicarse de la misma forma que para el ruido ideal *AWGN* o para canales con desvanecimiento plano.

En este capítulo, se presenta un esquema de pre-codificación no lineal para canales *MIMO*. Como en la transmisión *SISO*, es el homólogo de la matriz *DFE* y refleja la misma dualidad con *SVD* que *THP* con la transmisión multi-portadora. Por supuesto, la pre-codificación requiere *CSI* en el lado transmisor. Para subrayar los principios de la pre-codificación *MIMO*, asumimos que se dispone de un *CSI* perfecto. La cuestión de cómo el *CSI* adecuado tiene que estar en el transmisor se trata en [22].

2. Modelo de canal y BLAST:

Canal MIMO:

La transmisión se va a hacer mediante N_T antenas transmisoras y N_R antenas receptoras. Siguiendo lo mostrado en [10] y [11], asumimos que entre cada antena transmisora y receptora tenemos un canal plano, con desvanecimiento no dispersivo.

Las entradas al canal $\mathbf{s}_l, l = 1, \dots, N_T$, siendo \mathbf{v} el intervalo de símbolo, se asume que también son incorreladas (espacial y temporalmente), cada una con la misma varianza $\sigma_s^2 = \epsilon\{|\mathbf{s}_l|^2\}$. Combinando estos símbolos, transmitiéndolo simultáneamente sobre las N_T antenas en el vector $\mathbf{s} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{N_T}]^T$ y organizando las muestras correspondientes en las N_R antenas receptoras en el vector $\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_R}]^T$ la relación entrada/salida del canal MIMO viene dada por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad \text{Ecuación 7.2.1}$$

Las muestras de ruido aditivo del canal en cada antena receptora son combinadas en el vector $\mathbf{n} \triangleq [\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{N_R}]^T$. Las muestras de ruido $\mathbf{n}_k, k=1, \dots, N_R$, se espera que sean variables aleatorias gaussianas de media cero y mutuamente incorreladas,

Para evaluar la arquitectura, el ratio de señal a ruido (*SNR*) es un parámetro importante.

BLAST:

En [24] se introduce el algoritmo de detección para transmisión sobre el canal *MIMO* descrito previamente. Requiere información estática del canal (perfecta) sólo en el receptor. Los símbolos de canal \mathbf{s}_l se obtienen a partir de alguna constelación de símbolos \mathcal{A} y lo mismo para los símbolos que transportan datos $\mathbf{s}_l = \mathbf{a}_l, \mathbf{a}_l \in \mathcal{A}, l = 1, \dots, N_T$. El principal objetivo del algoritmo es la detección sucesiva de los símbolos de datos paralelos

3. Precodificación Tomlinson-Harashima

Concepto Básico:

Inicialmente la Precodificación de Tomlinson-Harashima (*THP*) [26], [27] se propuso para la ecualización de la interferencia intersimbólica (*ISI*) de canales *SISO* con una severa distorsión no lineal. Este *THP* “clasico” puede interpretarse como un movimiento de la parte de realimentación del *DFE* al transmisor. El esquema de realimentación que se vio en el *DFE* (Figura 6.2.1), se puede pasar al transmisor, si hacemos: $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{G}$ y $\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^H \cdot \mathbf{S}_0^{-1} \cdot \mathbf{G}^{-H}$, como se muestra en la Figura 7.3.1:

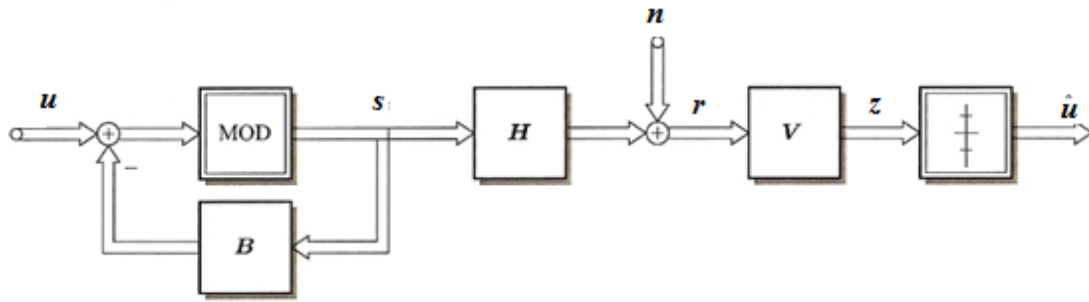


Figura 7.3.1: Precodificación Tomlinson Harashima para canales MIMO

Como la pre-ecualización lineal aumentaría la potencia transmitida, *THP* emplea el módulo aritmético- por tanto es una tecnología de ecualización no lineal.

Usando *THP*, las dos principales deficiencias del esquema *DFE* pueden superarse:

1. Como la estructura de realimentación está ahora localizada en el transmisor donde todas las señales son perfectamente conocidas, no se produce propagación de errores.
2. Para ecualización, no se requieren decisiones inmediatas.

Por tanto, la codificación de canal puede aplicarse de forma sencilla, es decir, como se hace en el canal ideal *AWGN*.

Basándonos en la observación de que la aproximación *BLAST* descrita anteriormente es sólo una versión especial del *GDFE*, ahora se mostrará cómo *THP* puede aplicarse a las matrices de canal. Por tanto, las mismas ventajas pueden ganarse sobre *DFE*.

Mientras que en el *THP* “clásico”, un solo canal (normalmente de valor complejo) se ecualiza con respecto al tiempo, para los canales *MIMO*, se requiere ecualización espacial. Si, además, la matriz de canal introdujera interferencia intersimbólica, debe llevarse a cabo una ecualización temporal y espacial combinada.

Para una mayor claridad, a la hora de explicar los principios fundamentales, nos vamos a restringir a la ecualización puramente espacial, es decir, los canales presentes tendrán desvanecimiento plano. Además, por brevedad, asumimos que \mathbf{H} es una matriz cuadrada $K \times K$ (es decir, $K=N_T=N_R$). La extensión al caso general es sencilla.

La operación de *THP* está estrechamente conectada a la constelación de símbolos usada \mathbf{U} . Por el momento, asumimos que en cada uno de los flujos paralelos de datos, se emplea una constelación cuadrada M-aria (con M un número cuadrado) donde las coordenadas de los puntos de la señal son enteros impares, es decir:

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u}_1 + j\mathbf{u}_Q \mid \mathbf{u}_I, \mathbf{u}_Q \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm (\sqrt{M} - 1)\} \right\} \quad \text{Ecuación 7.3.1}$$

La constelación está limitada por la región cuadrada de longitud de lado $2\sqrt{M}$.

Si la cuestión del módulo en el transmisor se ignorase, la ecualización lineal de la cascada \mathbf{VH} estaría presente. Por tanto, debido a la estructura triangular de la matriz de realimentación \mathbf{B} , los símbolos del canal, $\mathbf{s}_k, k = 1, \dots, K$ se generarían sucesivamente a partir de los símbolos de datos $\mathbf{u}_k \in \mathbf{U}$:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{b}_{kl} \mathbf{s}_l, \quad k = 1, \dots, K \quad \text{Ecuación 7.3.2}$$

Como esta estrategia incrementaría significativamente la potencia transmitida, los símbolos de canal son *reducidos por módulo* en la región limitada \mathbf{U} . Matemáticamente, los múltiplos enteros de $2\sqrt{M}$ se añaden a la parte real e imaginaria de \mathbf{s}_l . Ahora, los símbolos del canal vienen dados por:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{b}_{kl} \mathbf{s}_l, \quad k = 1, \dots, K \quad \text{Ecuación 7.3.3}$$

Donde $\mathbf{d}_k \in \{2\sqrt{M} \cdot (\mathbf{d}_I + j\mathbf{d}_Q) \mid \mathbf{d}_I, \mathbf{d}_Q \in \mathbb{Z}\}$. En otras palabras, en lugar de alimentar los símbolos de datos \mathbf{u}_k en la pre-distorsión lineal, los *símbolos de datos efectivos* $\mathbf{v}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k$ se pasan por $(\mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1}$, que se implementa a través de la estructura de realimentación. Es decir, la constelación de símbolos iniciales se extiende periódicamente (con periodo $2\sqrt{M}$). Como los *símbolos pre-codificados* \mathbf{d}_k están adaptados a la región límite de la constelación de señales inicial, los puntos en la señal expandida se toman también de una cuadrícula bidimensional.

Todos los puntos, espaciados en su parte real e imaginaria mediante múltiplos enteros de $2\sqrt{M}$ son congruentes y representan los mismos datos. Desde estos puntos equivalentes, símbolo por símbolo, dicho punto es seleccionado para la transmisión, lo que resulta en una caída de los símbolos del canal en la región límite de U . De forma notable, esta elección es única y se hace implícitamente mediante el dispositivo del módulo.

Como la pre-distorsión lineal vía $(\mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}$ ecualiza la cascada \mathbf{VH} , tras el pre-filtrado y escalado, los símbolos de datos efectivos \mathbf{v}_k , corrompidos por el ruido aditivo, son visibles en el receptor, es decir, $\mathbf{z} = \mathbf{v} + \mathbf{n}'$. Aquí, \mathbf{n}' denota el ruido del canal filtrado y $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_K]^T$. Usando una parte que tenga en cuenta la extensión periódica, puede generarse una estimación para los símbolos de datos (vector \mathbf{u}).

De forma alternativa, los símbolos recibidos \mathbf{z}_k pueden ser en primer lugar reducidos por el módulo a la región de la constelación de señal U . Entonces un cuantificador convencional es suficiente.

La pre-codificación *Tomlinson-Harashima* puede funcionar en combinación con otras constelaciones que sean cuadradas. El único requisito es que los símbolos pre-codificados estén acoplados a la región límite de la constelación de señal de manera que el espacio entero se llena de réplicas periódicas.

Usando la pre-codificación de *Tomlinson-Harashima*, los símbolos del canal \mathbf{s}_k ya no se toman de la constelación de símbolos U . En la precodificación “clásica”, los símbolos del canal son (aproximadamente) uniformemente distribuidos sobre la región límite de U . Esto conduce en cierta forma a un incremento de la potencia transmitida, cuantificado por las *pérdidas de pre-codificación*.

Incluso para tamaños moderados de M , esta pérdida es insignificante y se desvanece a medida que M aumenta. Además, las componentes \mathbf{s}_k , puede asumirse que son mutuamente incorreladas con varianza $\sigma_s^2 = \epsilon \{|\mathbf{s}_k|^2, |\}, \forall k$.

En la siguiente figura se muestran los diagramas de dispersión de los símbolos del canal \mathbf{s}_k y los símbolos recibidos \mathbf{z}_k para un canal *MIMO* con $K=4$ entradas y $K=4$ salidas. En cada uno de los canales paralelos se usa una constelación *16-QAM*. Desde la componente 1 hasta la 4, los símbolos de canal tienden de la constelación inicial *16-QAM* a una distribución casi uniforme sobre la región límite.

De manera simultánea, los símbolos de datos efectivos se toman de un conjunto de señales cada vez más expandido. Puede verse la distribución no uniforme de los símbolos de datos efectivos \mathbf{v}_k . Además, las distintas varianzas de ruido que son efectivas para las distintas componentes son también visibles en la última fila de la figura adjunta.

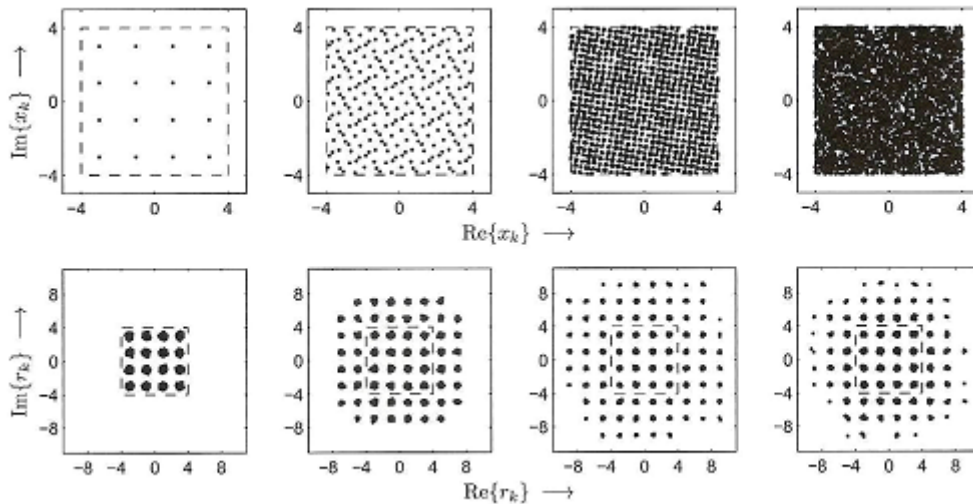


Figura 10: Obtenida de [22]

Cálculo de la Matriz de Filtrados:

El cálculo de los filtros en *BLAST* [24], puede interpretarse como la actuación de una *factorización-QL* de una versión permutada de la matriz de canal, correspondiente a una re-etiquetación de las antenas transmisoras. En consecuencia, asumimos que esta re-etiquetación está ya incluida en la matriz \mathbf{H} . Por tanto, la factorización queda:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^H \mathbf{S} \quad \text{Ecuación 7.3.4}$$

Donde \mathbf{F} es la matriz unitaria de realimentación hacia delante y $\mathbf{S} = [s_{ij}]$ una matriz triangular inferiormente por la izquierda.

Tenemos por tanto: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}^H \cdot \mathbf{S}$. Si $\mathbf{V} = \mathbf{diag}(s_{11}^{-1}, \dots, s_{KK}^{-1}) \cdot \mathbf{F}$, sustituyendo en la ecuación anterior tenemos: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{diag}(s_{11}^{-1}, \dots, s_{KK}^{-1}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^H \cdot \mathbf{S} = \mathbf{C}$, siendo \mathbf{C} una matriz triangular inferior. La matriz de realimentación \mathbf{B} viene dada por: $\mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$.

Como $\mathbf{H} = \mathbf{F}^H \mathbf{S}$ y \mathbf{F} es una matriz unitaria, tenemos que $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{S}^H \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{S} = \mathbf{S}^H \mathbf{S}$ y la matriz \mathbf{S} triangular inferiormente puede obtenerse mediante una *factorización Cholesky* de $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$.

La aproximación anterior resulta en filtros ajustados de acuerdo con el criterio Forzador de Ceros (ZF). Para derivar una solución, que optimice las matrices de acuerdo con el criterio de Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE), consideramos la señal de error de la siguiente forma:

$$\mathbf{e} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{v} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} \quad \text{Ecuación 7.3.5}$$

Mirando el *Principio de Ortogonalidad*, se requiere que $\mathbf{e} \perp \mathbf{r}$, lo que nos lleva a:

$$\epsilon\{\mathbf{e} \mathbf{r}^H\} = \epsilon\{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \mathbf{r}^H - \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} \mathbf{r}^H\} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{V} \Phi_{rr} = \mathbf{C} \mathbf{R}_{sr} \quad \text{Ecuación 7.3.6}$$

Como $\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}$, $\epsilon\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\} = \sigma_s^2 \mathbf{I}$, y $\epsilon\{\mathbf{s}\mathbf{n}^H\} = \mathbf{0}$, las matrices de correlación vienen dadas por:

$$\mathbf{R}_{rr} = \sigma_r^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad \text{Ecuación 7.3.7}$$

$$\mathbf{R}_{sr} = \sigma_s^2 \mathbf{H}^H \quad \text{Ecuación 7.3.8}$$

Y tenemos:

$$\mathbf{V}(\sigma_s^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}) = \mathbf{C}\sigma_s^2 \mathbf{H}^H \quad \text{Ecuación 7.3.9}$$

O usando $\zeta = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{H}^H \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \zeta \mathbf{I})^{-1} \quad \text{Ecuación 7.3.10}$$

Por tanto, el error puede expresarse como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{C}\mathbf{H}^H \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \zeta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{s} = \mathbf{C}(\mathbf{H}^H \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \zeta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\text{Ecuación 7.3.11}$$

La matriz de correlación del nuevo vector de error definido $\tilde{\mathbf{e}}$ se calcula como:

$$\boldsymbol{\phi}_{\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}} = \sigma_s^2 (\mathbf{I} - \mathbf{H}^H (\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \zeta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}) \quad \text{Ecuación 7.3.12}$$

Con la ayuda del *lemma de inversión de matriz* [28], la última ecuación puede transformarse en:

$$\boldsymbol{\phi}_{\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}} = \sigma_n^2 (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \zeta \mathbf{I})^{-1} \quad \text{Ecuación 7.3.13}$$

Usando este resultado, la matriz de correlación de los errores queda:

$$\boldsymbol{\phi}_{ee} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}} \cdot \mathbf{C}^H \quad \text{Ecuación 7.3.14}$$

En el caso óptimo, el error es “blanco”, es decir, $\boldsymbol{\phi}_{ee} = \text{diag}(\sigma_{e,1}^2, \dots, \sigma_{e,K}^2)$. Por tanto, la matriz \mathbf{C} tiene que ser el *filtro blanqueador* para el proceso con matriz de

correlación $\phi_{\tilde{e}\tilde{e}} = \sigma_n^2 (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \zeta \mathbf{I})^{-1}$. La matriz \mathbf{C} y la correspondiente matriz de ganancia \mathbf{V} puede obtenerse a partir de la *Factorización Cholesky* de:

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \zeta \mathbf{I} = \mathbf{S}^H \mathbf{S} \quad \text{Ecuación 7.3.15}$$

$$\phi_{ee} = \sigma_n^2 \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{S}^H \cdot \mathbf{S})^{-1} \cdot \mathbf{H}^H = \Lambda \text{diagonal} \rightarrow \mathbf{C} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \Lambda^{1/2} \rightarrow \mathbf{C} = \Lambda^{1/2} \cdot \mathbf{S}$$

$$\text{Ecuación 7.3.16}$$

Aquí, \mathbf{S} es de nuevo una matriz triangular inferiormente por la izquierda. La matriz \mathbf{F} de realimentación hacia delante se obtiene entonces a partir de la **Ecuación 7.3.10** como:

$$\mathbf{V} = \Lambda^{1/2} \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}^H \mathbf{S})^{-1} \mathbf{H}^H = \Lambda^{1/2} \cdot \mathbf{S}^{-H} \mathbf{H}^H \quad \text{Ecuación 7.3.16}$$

De forma notable, como se esperaba, la solución *MMSE* aproxima la solución *ZF* para valores altos de *SNR*, es decir, $\zeta \rightarrow 0$.

4. Extensiones:

Pre-codificación con el filtro de Realimentación hacia delante en el Receptor:

Como en la aproximación *SVD* para la ecualización espacial, se requiere la pre-codificación conjunta *MIMO* o procesamiento centralizado de los flujos de datos en el transmisor (pre-codificador) y en el receptor (filtro de realimentación hacia delante).

Por tanto, la pre-codificación *MIMO* es inmediatamente aplicable a los sistemas de tipo *BLAST* para incrementar la eficiencia espectral. Sin embargo, en algunas situaciones, las señales están accesibles conjuntamente sólo en un lado, por ejemplo, en la estación base en un escenario de enlace descendente de comunicaciones móviles. Por otro lado, los terminales están separados o *descentralizados*.

La aproximación *MIMO* puede modificarse a la hora de ser aplicable al procesamiento descentralizado. Básicamente, el filtro de realimentación hacia delante se mueve también al transmisor, llevando a señales completamente separadas en la salida del canal *MIMO*.

Pre-codificador Fijo y Ecualización Residual Adaptativa:

El esquema de pre-codificación *Tomlinson-Harashima* descrito asume que el transmisor está informado acerca de la realización real de la matriz de canal \mathbf{H} . Con este conocimiento, se calcula el establecimiento óptimo de la matriz pre-codificadora de realimentación \mathbf{B} . Sin embargo, sólo en la señalización de división dúplex en el tiempo (*TDD*) sobre un canal recíproco, el canal puede ser estimado en cada lado a partir de las señales recibidas y esta estimación ser usada inmediatamente para la dirección inversa.

Desafortunadamente, en la mayoría de los escenarios de transmisión los parámetros del canal tienen que ser estimados en el lado receptor y después comunicados al transmisor.

Como esta adquisición del canal lleva algún tiempo, en los escenarios variantes en el tiempo, el canal podría haber cambiado antes de que el estado del canal medido esté disponible en el transmisor. En consecuencia, incluso si el canal pudiera ser estimado perfectamente en el lado receptor y comunicado al transmisor sin ningún error, la información utilizable del canal en el pre-codificador y el canal real no coincidirían. Además, la transmisión de la información de estado del canal por sí misma requiere altas tasas de datos. Por tanto, el canal de vuelta sufre una pérdida en la tasa de datos de carga útil.

La principal idea para superar estos problemas es usar un *pre-codificador de compromiso*. El pre-codificador podría ajustarse a un canal promedio o a una matriz de covarianza promedio, respectivamente. De hecho, sólo el promedio (a medio o largo plazo) $\mathbf{E}\{\mathbf{H}^H \mathbf{H}\}$ es comunicado al transmisor una vez cada cierto tiempo. Por el contrario, un canal de vuelta de baja tasa es suficiente.

Como el pre-codificador y el canal real difieren en la interferencia residual (multi-usuario). Estas interferencias son suprimidas por medio de ecualización residual lineal en el lado receptor. Se ha demostrado que el conocimiento promedio en el transmisor causa sólo una pequeña pérdida de capacidad [22].

5. Conclusiones:

Hemos planteado la aplicación del principio de pre-codificación *Tomlinson-Harashima* al transmisor sobre enlaces de comunicación Multiple-Input Multiple-Output (*MIMO*).

En lugar de la ecualización de la interferencia intersimbólica (ecualización temporal), aquí se emplea ecualización espacial, es decir, ecualización de la interferencia multi-usuario.

Como en la transmisión *SISO*, se obtienen las mismas ventajas de la pre-codificación sobre la ecualización de decisiones realimentadas.

Capítulo 8: Resultados

En este capítulo vamos a estudiar las prestaciones de los esquemas estudiados en capítulos anteriores: *V-BLAST*, *V-BLAST/MAP*, *GDFE* y *THP*. Para ello se van a generar de forma aleatoria un conjunto de matrices \mathbf{H} , que nos permitirán simular el canal para cada uno de los esquemas. A través de las simulaciones estudiaremos la *SER* frente a la E_b/N_0 , modificando también tanto el número de antenas como el tipo de modulación utilizada.

Para obtener el valor de E_b/N_0 , se calcula en primer lugar la energía media de símbolo por antena ($Es=2*\sum(codigox*codigox')/size(codigox,2)$). A continuación calculamos la energía media de bit transmitida por antena ($Eb=Es/(2*\log2(size(codigox,2)))$). Una vez hecho esto, calcularemos el nivel de ruido ($N0=Eb./10.^{(EbN0/10)}$)

1. Comparativa V-BLAST:

Comportamiento con la SER:

Se realiza una simulación para comprobar el comportamiento del algoritmo *V-BLAST* en sus versiones *MMSE* y *ZF* comparándolo con las versiones *MMSE* y *ZF* respectivamente. La simulación se realiza para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=6$ y para una modulación *4-QAM*.

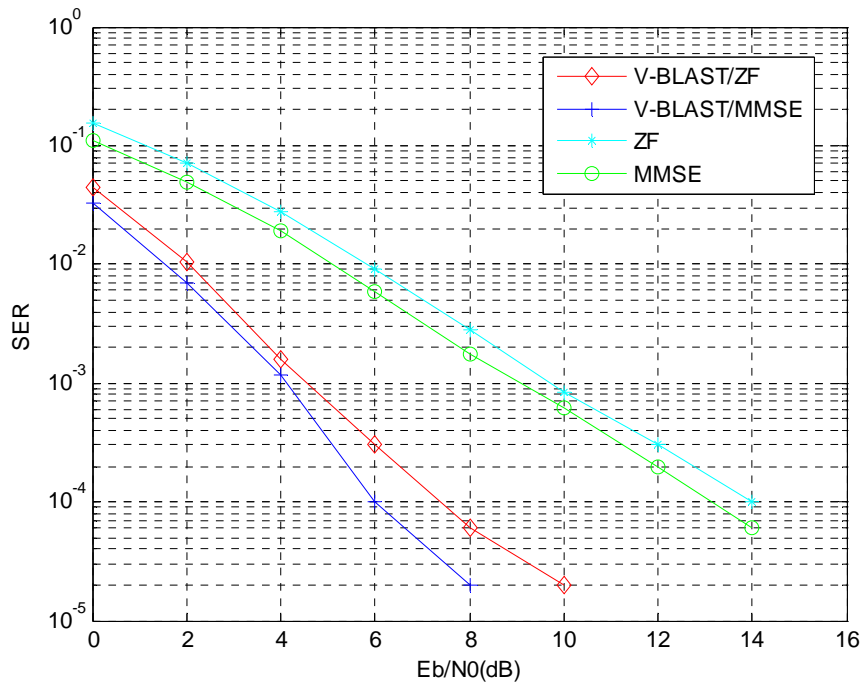


Figura 11: *Valor de SER frente a E_b/N_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM*

Como puede observarse a partir de los resultados gráficos obtenidos en Matlab, *V-BLAST* consigue niveles de *SER* inferiores a 10^{-4} a partir de los 6dB. Como puede también observarse, los algoritmos *V-BLAST* en sus dos versiones obtienen *SERs* inferiores a las obtenidas por los algoritmos clásicos *ZF* y *MMSE* para el mismo nivel de E_b/N_0 . Además puede también comprobarse que la versión *MMSE* tiene mejores prestaciones que la versión *ZF*.

Comportamiento con el número de antenas:

En este caso se realizan varias simulaciones para comprobar cómo varía el comportamiento del algoritmo *V-BLAST* en sus versiones *MMSE* y *ZF* con respecto al número de antenas, comparándolo a su vez con las versiones *MMSE* y *ZF* respectivamente.

Los algoritmos *BLAST* se pueden ver muy influidos por el canal y especialmente la versión Vertical (*V-BLAST*). Vamos a simular por tanto, empleando el mismo número de antenas en transmisión que en recepción. Este caso es crítico porque si uno de los sub-canales es muy desfavorable puede afectar gravemente a la *SER*.

En primer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=2$ y $N_R=2$ para una modulación 4-*QAM*.

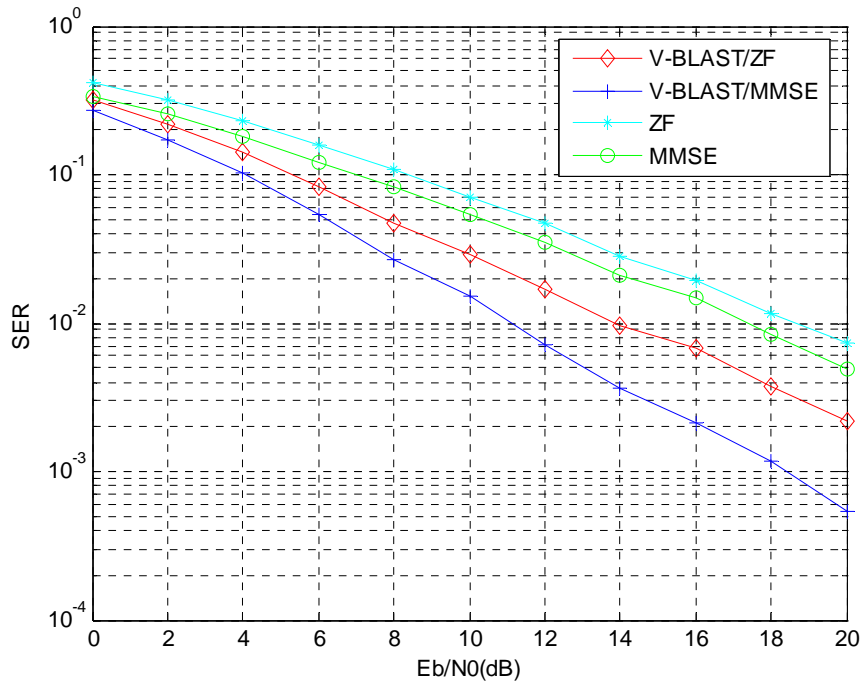


Figura 12: Valor de *SER* frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-*QAM*

Como puede observarse, de nuevo el mejor comportamiento lo presenta la versión *MMSE* de *V-BLAST*, que alcanza una *SER* de 10^{-3} para una E_bN_0 de aproximadamente 18 dB. Al igual que en el caso anterior, la versiones *MMSE* presentan mejores resultados que las versiones *ZF*.

En segundo lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=3$ y $N_R=3$ para una modulación 4-*QAM*, obteniéndose el siguiente resultado:

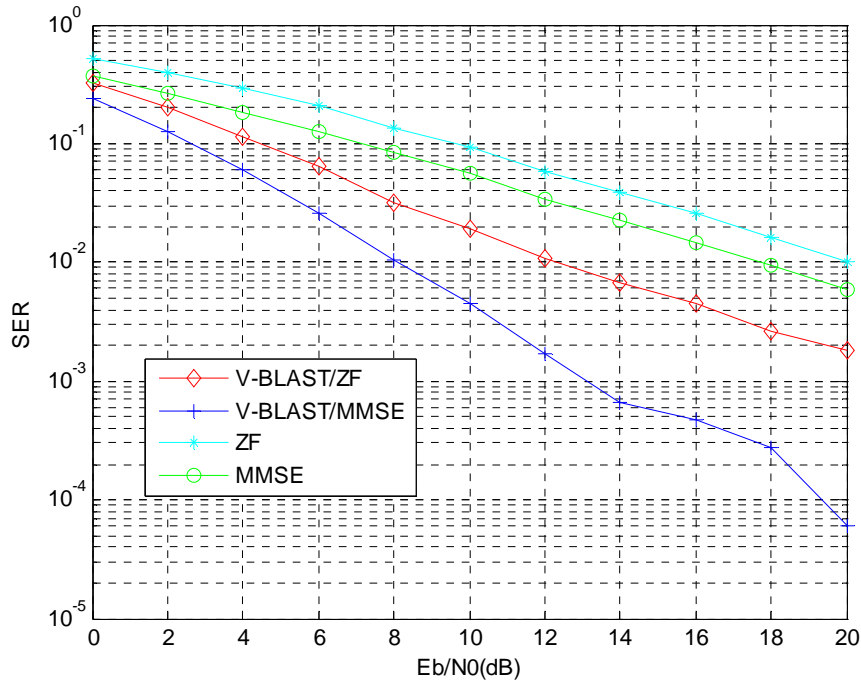


Figura 13: Valor de SER frente a E_bN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse, el valor de la SER para el algoritmo más eficiente, que de nuevo es la versión MMSE de V-BLAST, alcanza un valor de 10^{-4} , para una E_bN_0 de 19 dB. Por tanto, al aumentar el número de antenas transmisoras y receptoras en la misma proporción se ha conseguido reducir la SER en un orden de 10^{-1} . No obstante, en el resto de algoritmos no se ha producido el mismo efecto. Si bien la versión V-BLAST/ZF ha disminuido la SER, no lo ha hecho en la misma proporción y como puede comprobarse, las versiones tradicionales ZF y MMSE apenas se han modificado.

En tercer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=4$ para una modulación 4-QAM, obteniéndose el siguiente resultado:

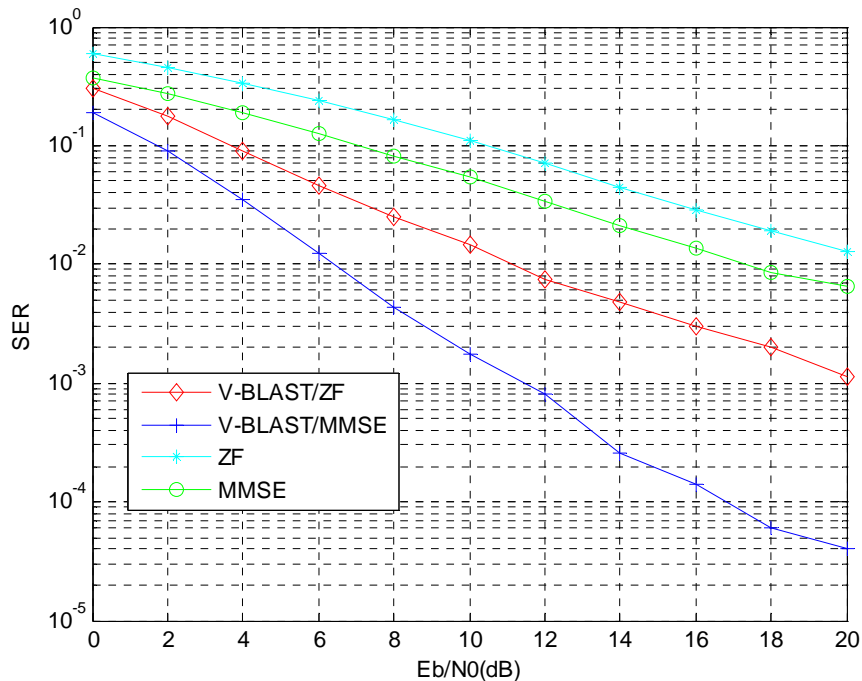


Figura 14: *Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM*

De nuevo, podemos verificar que la versión *V-BLAST/MMSE* es la que presenta un mejor comportamiento en el intervalo estudiado y, como en el caso anterior, al aumentar el número de antenas transmisoras y receptoras en la misma proporción, se consigue reducir de forma importante la *SER*. En el caso de la versión *V-BLAST/ZF*, su *SER* experimenta un ligero decremento y en el caso de las versiones tradicionales *ZF* y *MMSE* no se aprecia apenas variación.

Influencia de la modulación utilizada:

En este apartado se va a proceder a realizar varias simulaciones cuyo objetivo es obtener una comparativa de resultados para un mismo esquema *MIMO* variando únicamente el número de puntos de la constelación.

Vamos a proceder a realizar una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=6$ para una modulación 4-QAM y para una modulación 16-QAM, obteniéndose el siguiente resultado:

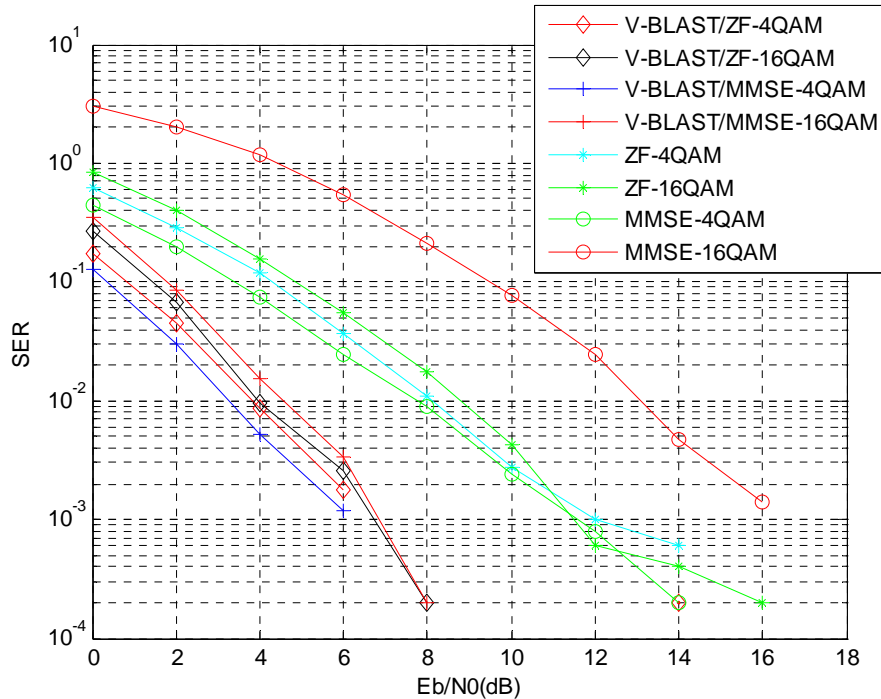


Figura 15: *Valor de SER frente a E_b/N_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM y 16 QAM respectivamente*

Como puede observarse, de nuevo el mejor comportamiento lo presenta la versión *MMSE* de *V-BLAST* y en concreto la obtenida con la modulación 4-QAM. Comprobamos también que la *SER* obtenida al emplear la modulación 16-QAM no tiene una pendiente tan pronunciada para los valores de E_b/N_0 con respecto al comportamiento que experimenta el mismo algoritmo, empleando una modulación 4-QAM. Puede también observarse, que la mayor diferencia se halla en el algoritmo *MMSE*, en el que las pendientes de las curvas difieren mucho de una modulación a otra.

En segundo lugar se realiza una simulación para un mismo número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=6$ y empleando en este caso únicamente una modulación 16-QAM. Obtenemos el siguiente resultado:

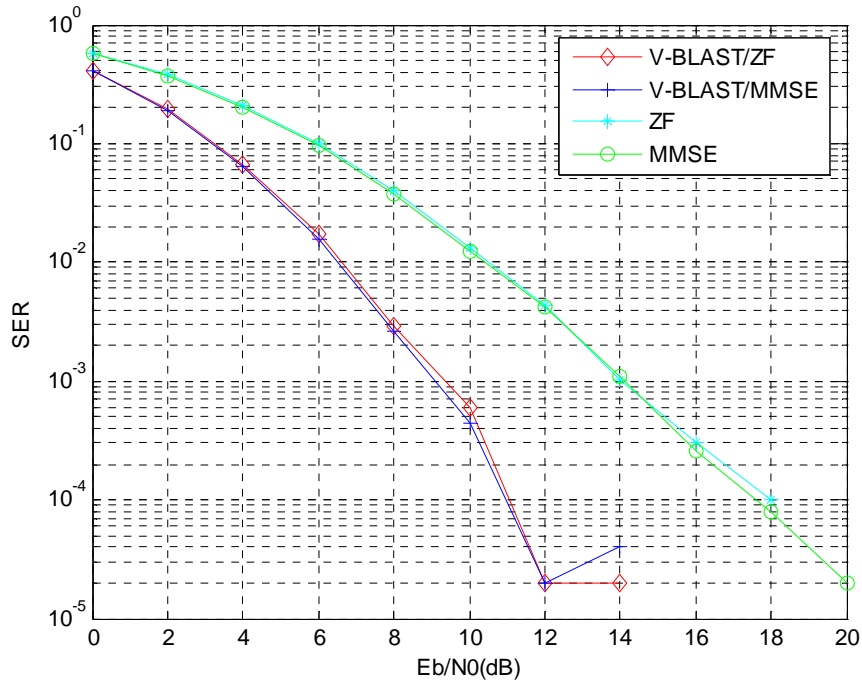


Figura 16: *Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 16 QAM*

Si comparamos con la **Figura 11** que emplea una modulación 4-QAM, vemos que se alcanzaban prácticamente los 10^{-5} para una E_bN_0 de 8 dB para el algoritmo V-BLAST/MMSE, mientras que en este caso dicho valor de SER no se alcanza hasta aproximadamente 14 dB. Además, puede observarse que tanto en el caso de V-BLAST como en el caso de los algoritmos tradicionales, las versiones ZF y MMSE presentan un comportamiento mucho más similar en todo el intervalo de E_bN_0 .

2. Comparativa GDFE:

Comportamiento con la SER:

Se realiza una simulación para comprobar el comportamiento del algoritmo *GDFE* en sus versiones *MMSE* y *ZF* comparándolo con las versiones *MMSE* y *ZF* respectivamente. La simulación se realiza para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=6$ para una modulación 4-QAM.

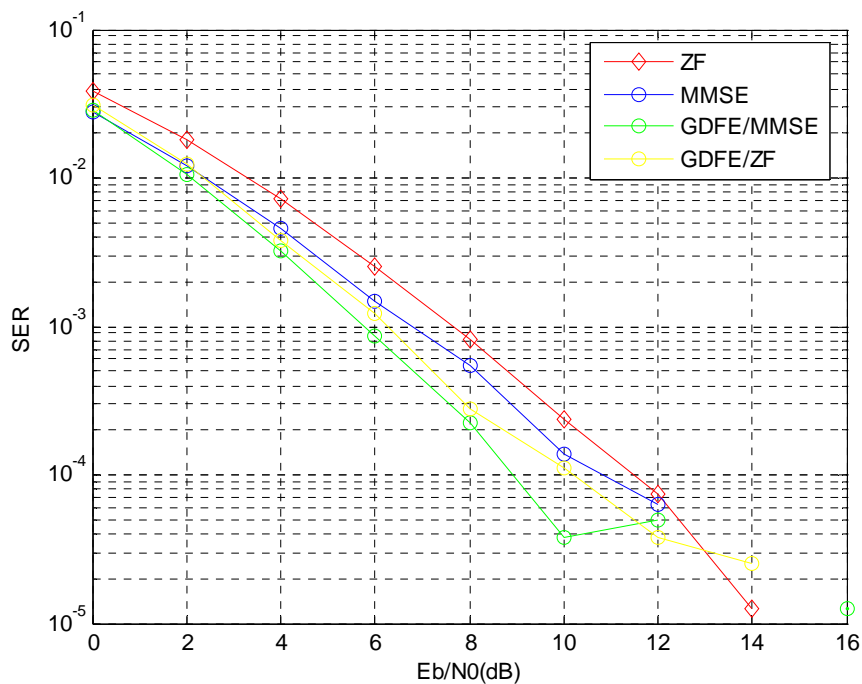


Figura 17: Valor de *SER* frente a $E_b N_0$ para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse a partir de los resultados gráficos obtenidos, el algoritmo *GDFE* consigue niveles de *SER* inferiores a 10^{-4} a partir de los 9dB. También podemos comprobar que el comportamiento del algoritmo *GDFE* es mejor que el de los algoritmos tradicionales en sus respectivas versiones. No obstante, existe una menor diferencia en cuanto a la pendiente de las curvas de *SER* de los algoritmos tradicionales con respecto al de las curvas correspondientes a los *GDFE*, que la que había en el caso homólogo para el algoritmo *V-BLAST*. Además, se verifica de nuevo que las versiones *MMSE* presentan un comportamiento mejor en cuanto a *SER* que las versiones *ZF*.

Comportamiento con el número de antenas:

En este caso se realizan varias simulaciones para comprobar cómo varía el comportamiento del algoritmo *GDFE* en sus versiones *MMSE* y *ZF* con respecto al número de antenas, comparándolo a su vez con las versiones *MMSE* y *ZF* respectivamente.

Al igual que en el caso *V-BLAST*, vamos a llevar a cabo la simulación empleando el mismo número de antenas en transmisión y en recepción. Este caso, al igual que ocurría en el caso *V-BLAST*, es crítico y nos permitirá observar cómo varía el comportamiento del algoritmo con la variación del número de antenas en situaciones críticas.

En primer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=2$ y $N_R=2$ para una modulación *4-QAM*.

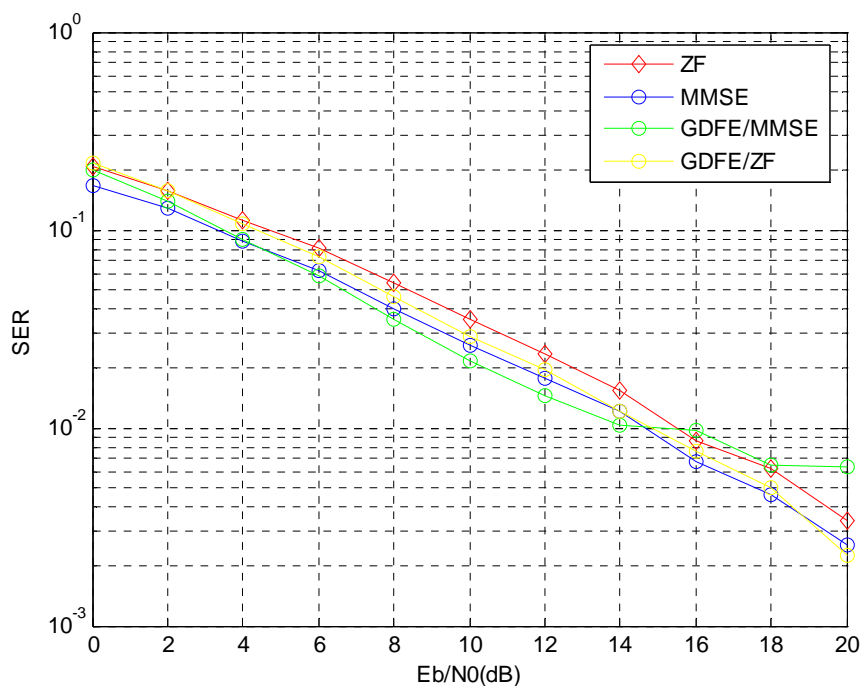


Figura 18: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación *4-QAM*

Como puede observarse a partir del resultado gráfico que nos proporciona Matlab, el mejor comportamiento lo presentan las versiones *MMSE* tanto de *GDFE* como de la versión tradicional. Vemos que no existen grandes diferencias entre los comportamientos de las curvas que representan las versiones *ZF* y *MMSE* del algoritmo *GDFE* y sus homólogas en los algoritmos tradicionales. Además, observamos que la versión *ZF* del algoritmo *GDFE* y la versión tradicional de *ZF* tienen un comportamiento muy similar, ocurriendo de la misma forma para el caso *MMSE*. Podemos observar también que a partir de una EbN_0 de 14 dB el mejor comportamiento lo presenta la versión *MMSE* tradicional, siendo la versión *GDFE/MMSE* la que presenta un peor comportamiento.

En segundo lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=3$ y $N_R=3$ para una modulación 4-QAM, obteniéndose el siguiente resultado:

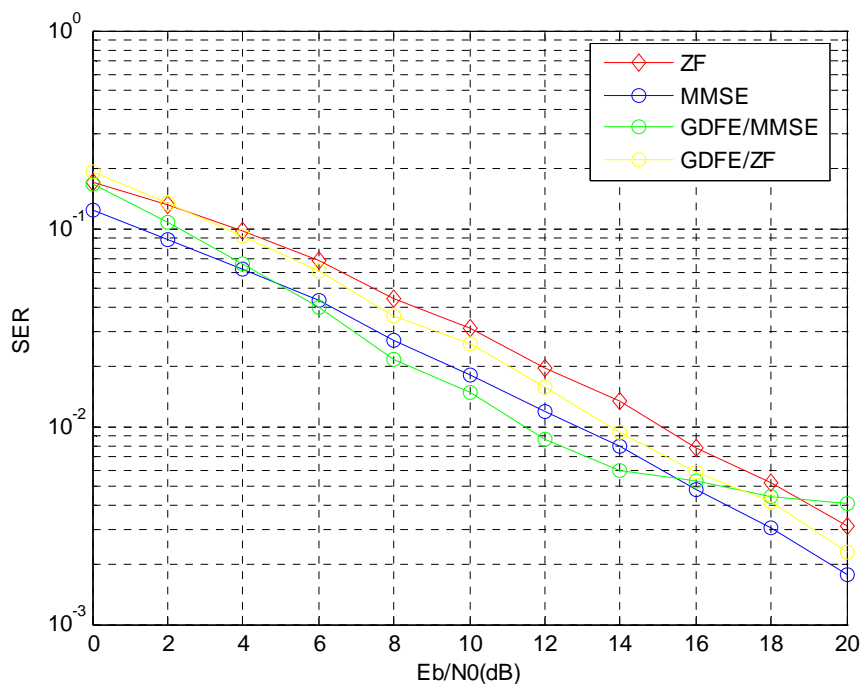


Figura 19: Valor de SER frente a EbN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse de esta nueva gráfica obtenida, el mejor comportamiento lo presentan las versiones *MMSE* tanto de *GDFE* como la versión tradicional, aunque, como se comentó en la gráfica anterior, a partir de un valor de EbN_0 de 16 dB en este caso, el algoritmo *GDFE/MMSE* empeora su comportamiento, siendo

el algoritmo *MMSE* en la versión tradicional el que presenta un comportamiento mejor. Vemos que en este caso de estudio existen diferencias mayores entre la versión *ZF* tradicional y la versión *GDFE/ZF* y las correspondientes versiones *MMSE*, aunque esta diferencia no es muy notable. Con respecto a la gráfica anterior observamos que, al aumentar en la misma proporción el número de antenas transmisoras y receptoras, la *SER* disminuye ligeramente en todos los casos.

En tercer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=4$ para una modulación *4-QAM*, obteniéndose el siguiente resultado:

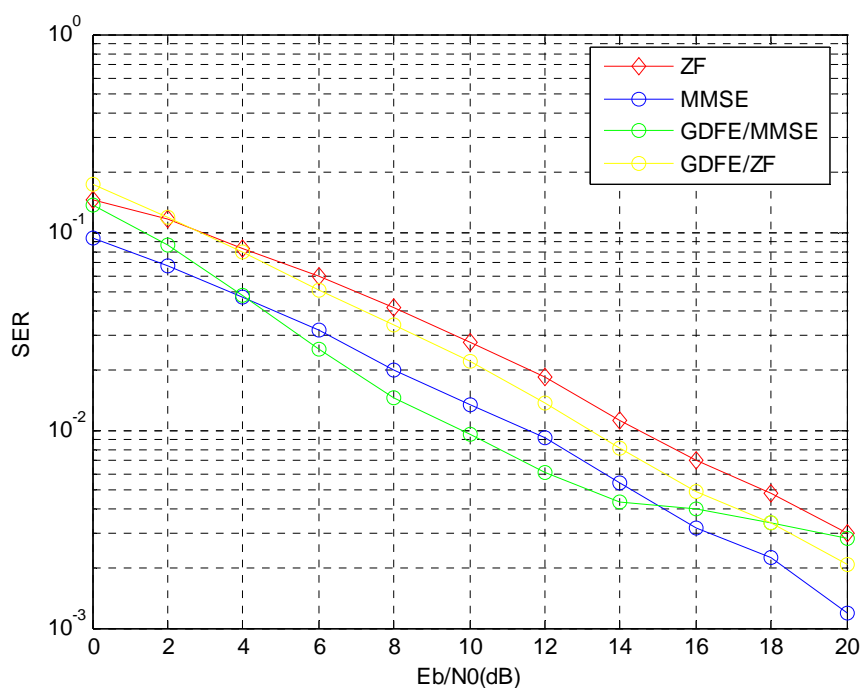


Figura 20: Valor de *SER* frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación *4-QAM*

En este caso observamos, con respecto al caso anterior de 3 antenas en transmisión y en recepción, que el valor de la *SER* disminuye ligeramente al aumentar el número de antenas. En este caso, el comportamiento del algoritmo *GDFE/MMSE* empeora a partir de un valor de E_bN_0 de 16 dB, como en el caso anterior. La diferencia entre las versiones *MMSE* y *ZF* es aún más notable en este caso, siendo de nuevo, y con mayor diferencia con respecto al resto de resultados, el algoritmo *MMSE* el que proporciona unas mejores prestaciones.

Influencia de la modulación utilizada:

En este apartado se van a realizar varias simulaciones cuyo objetivo es el de obtener una comparativa de resultados, en los que, utilizando el mismo esquema de sistema *MIMO*, se varía el número de puntos de la modulación utilizada.

Para ello, en primer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=6$ empleando las modulaciones *4-QAM* y *16-QAM* para cada uno de los algoritmos comparados. El resultado obtenido es el siguiente:

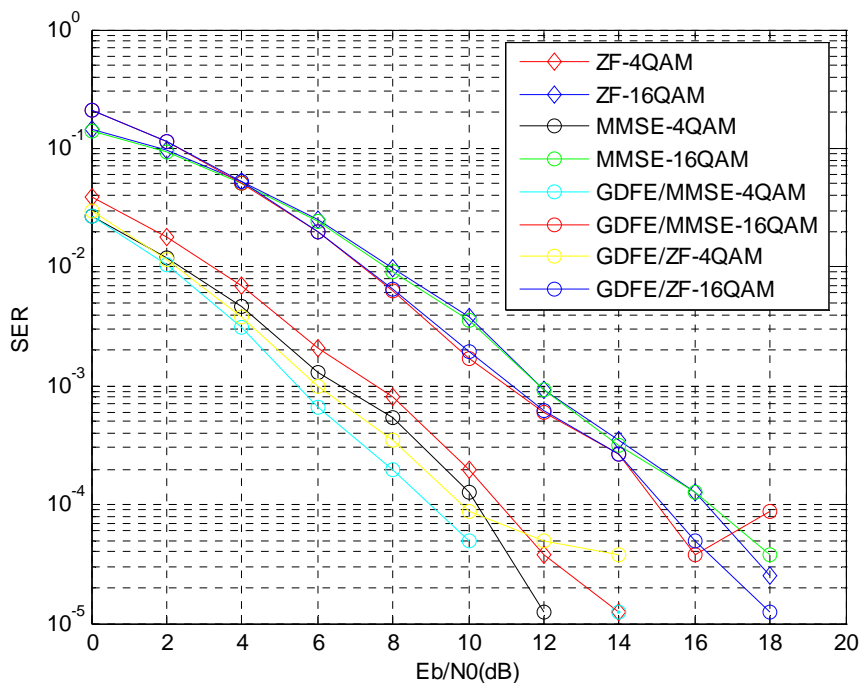


Figura 21: *Valor de SER frente a E_b/N_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM y 16-QAM respectivamente*

Al igual que ocurría en el caso de estudio homólogo para el algoritmo *V-BLAST*, cuando utilizamos una modulación con más puntos (en este caso la *16-QAM*) la *SER* tiene una caída más suave con respecto a los valores de E_b/N_0 . Como puede observarse las mejores prestaciones las proporciona la versión *MMSE* del *GDFE* con modulación *4-QAM*, seguida de la versión *ZF* del *GDFE* también con modulación *4-QAM*. Las versiones tradicionales *ZF* y *MMSE* presentan un mejor comportamiento al emplear la modulación *4-QAM* que las versiones *MMSE* y *ZF* del *GDFE* con una modulación *16-QAM*.

En segundo lugar se realiza una simulación para un mismo número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=6$ y en este caso empleando exclusivamente una modulación *16-QAM*. Obtenemos el siguiente resultado:

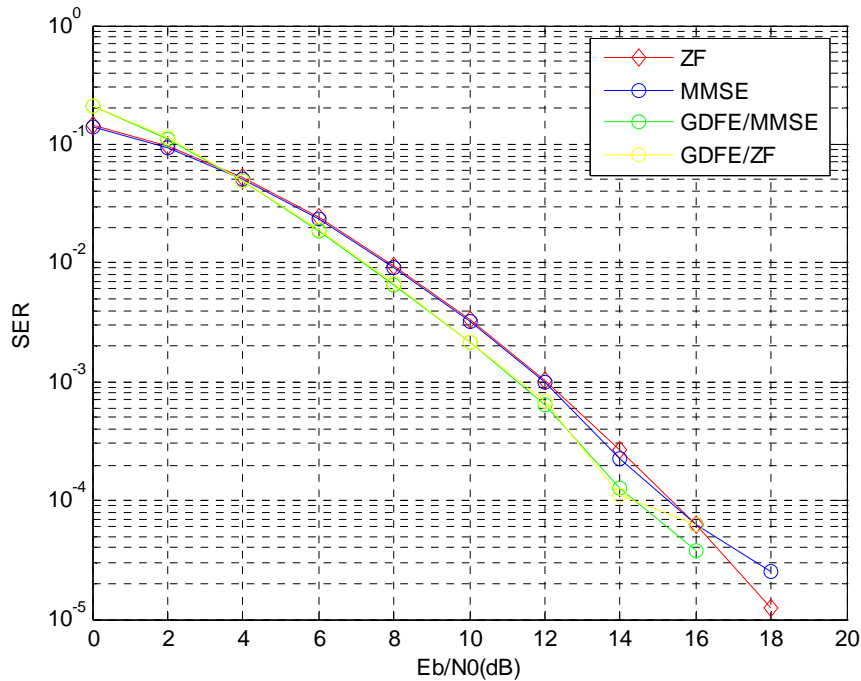


Figura 22: Valor de *SER* frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación *16-QAM*

Como se ha comentado, la *SER* no tiene una pendiente tan pronunciada con respecto a los valores de E_bN_0 como en el caso de una modulación *4-QAM*. Si en el caso de la modulación *4-QAM* la *SER* alcanzaba los 10^{-4} para una E_bN_0 de 8 dB para el algoritmo *GDFE/MMSE*, en este caso dicho valor de *SER* no se alcanza hasta los 14 dB. Además, puede observarse que tanto en el caso de *GDFE* como en el caso de los algoritmos tradicionales, las versiones *ZF* y *MMSE* presentan un comportamiento mucho más similar en todo el intervalo de E_bN_0 .

3. Comparativa V-BLAST/MAP:

Comportamiento con la SER:

Se realiza una simulación para comprobar el comportamiento del algoritmo *V-BLAST/MAP* en su versión *ZF* comparándolo con la versión *ZF* del algoritmo original *V-BLAST* y con la aproximación *ML*. La simulación se realiza para un número de antenas transmisoras $N_T=8$ y $N_R=12$ y para una modulación *4-QAM*.

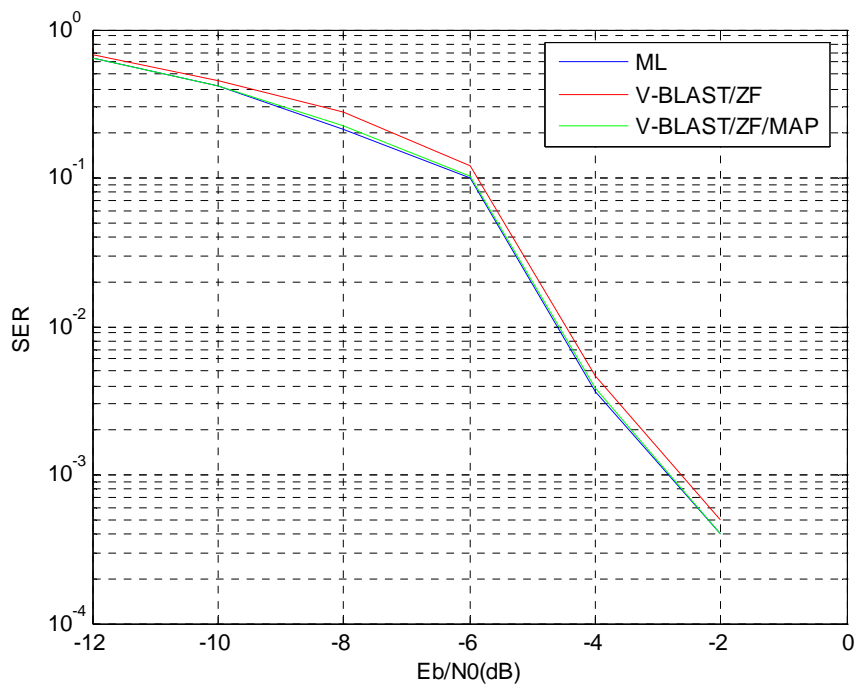


Figura 23: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación *4-QAM*

Como puede observarse a partir de los resultados gráficos obtenidos, el algoritmo *V-BLAST/MAP* consigue unas prestaciones muy cercanas a las de la aproximación *ML*. También puede observarse la mejora en el comportamiento que supone esta modificación con respecto al algoritmo *V-BLAST* original.

En segundo lugar se realiza una simulación para comprobar el comportamiento del algoritmo *V-BLAST/MAP* en sus versiones *ZF* y *MMSE* con respecto a las versiones *ZF* y *MMSE* del algoritmo original *V-BLAST*. Para ello se emplean un número de antenas transmisoras $N_T=8$ y $N_R=12$ y una modulación *16-QAM*.

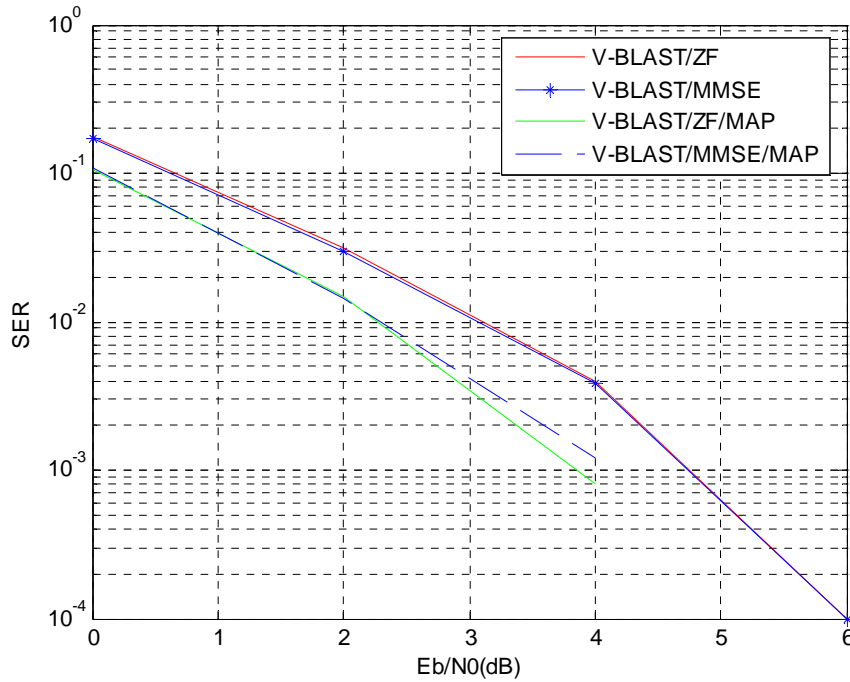


Figura 24: Valor de *SER* frente a E_b/N_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación *16-QAM*

Como puede observarse a partir de la gráfica obtenida en Matlab, el algoritmo *V-BLAST/MAP*, como ya se señaló en la simulación anterior, proporciona una significativa mejora de las prestaciones con respecto al algoritmo *V-BLAST* original, a cambio de un ligero incremento de la complejidad. Además puede observarse que mientras en el caso del algoritmo *V-BLAST* la versión *MMSE* presenta un comportamiento ligeramente más óptimo que el de la versión *ZF* (y que se hace más patente a medida que aumenta la E_b/N_0), en el caso del algoritmo *V-BLAST/MAP*, la versión *ZF* presenta un comportamiento mejor, a medida que se incrementa el valor de E_b/N_0 , que la versión *MMSE*.

Comportamiento con el número de antenas:

Como en los casos de estudio anteriores, se realizan varias simulaciones para comprobar cómo varía el comportamiento del algoritmo *V-BLAST/MAP* en sus versiones *MMSE* y *ZF* con respecto al número de antenas, comparándolo a su vez con las versiones *MMSE* y *ZF* del algoritmo *V-BLAST* original, respectivamente.

Al igual que en el caso *V-BLAST*, vamos a llevar a cabo la simulación empleando el mismo número de antenas en transmisión y en recepción. Este caso nos permitirá observar cómo varía el comportamiento del algoritmo con la variación del número de antenas en situaciones críticas.

En primer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=2$ y $N_R=2$ y para una modulación *4-QAM*.

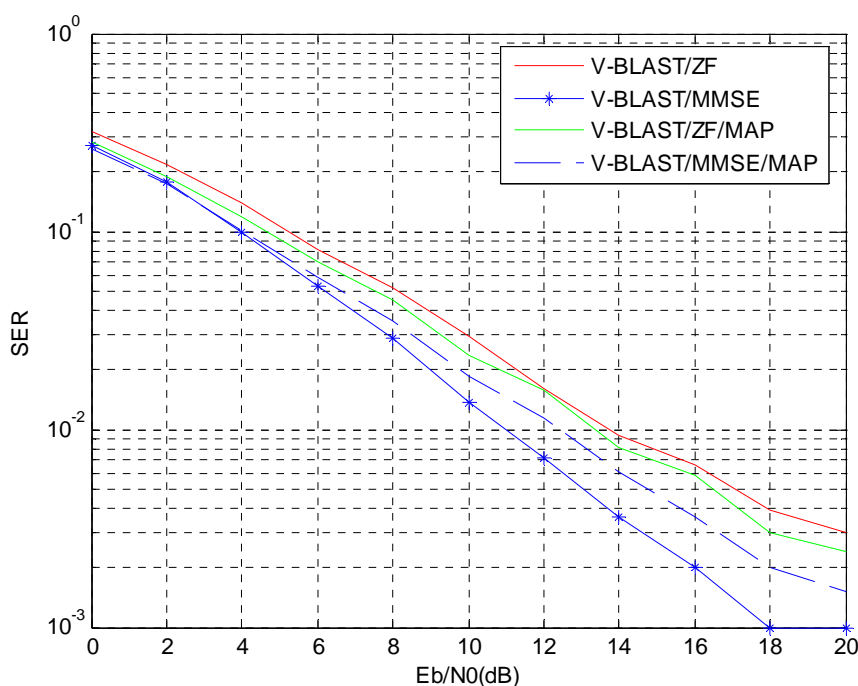


Figura 25: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación *4-QAM*

Como puede verse en la gráfica adjunta, en el comienzo del intervalo de EbN_0 , apenas existe diferencia entre las versiones *V-BLAST* originales y la versión modificada *V-BLAST/MAP*, siendo el comportamiento de todos los algoritmos muy similar en cuanto a *SER*. No obstante, puede apreciarse que a medida que aumentamos el valor de EbN_0 , los algoritmos se van diferenciando en su comportamiento, siendo el algoritmo *V-BLAST/MMSE* original el que presenta unas mejores prestaciones. Sin embargo, el algoritmo *V-BLAST/MAP/ZF* sí presenta unas mejores prestaciones que su homólogo de la versión tradicional, a diferencia de lo que ocurre en las versiones *MMSE*.

En segundo lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=3$ y $N_R=3$ para una modulación *4-QAM*, obteniéndose el siguiente resultado:

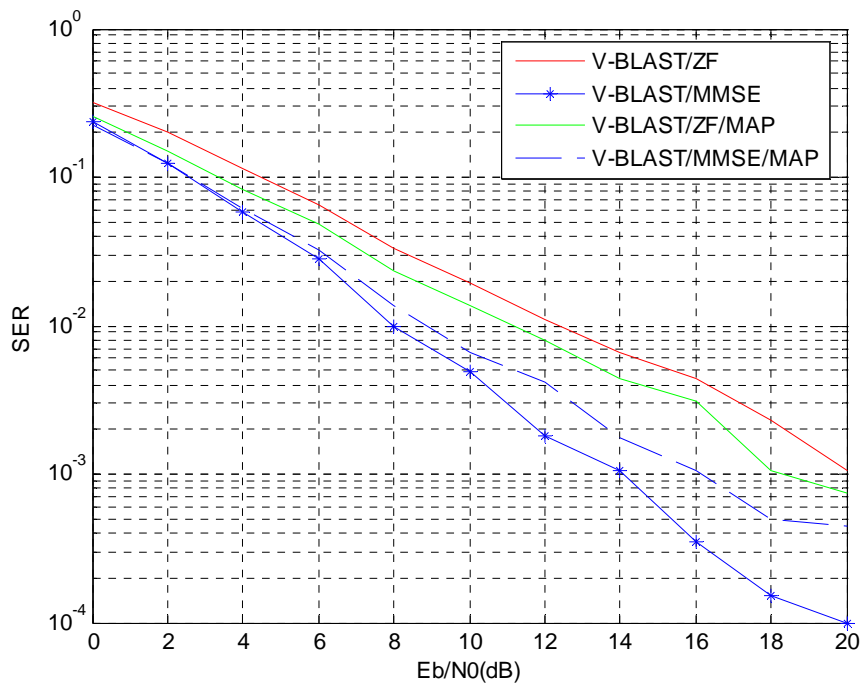


Figura 26: Valor de *SER* frente a EbN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación *4-QAM*

Como muestra el resultado proporcionado por Matlab, el comportamiento de las versiones *MMSE* de *V-BLAST* y *V-BLAST/MAP* es muy similar hasta el valor de EbN_0 de aproximadamente 5 dB, comenzando a separarse las pendientes de dichas curvas a partir de ese valor, y demostrando entonces un mejor comportamiento el algoritmo *V-BLAST* original. Como ocurría en el caso anterior, la versión *V-BLAST/MAP/ZF* sí mejora en todo el intervalo de estudio, el comportamiento de su homólogo en *V-BLAST*.

Vemos además, como que ambos algoritmos reducen su SER para los mismos valores de EbN_0 que en el caso de anterior de dos antenas.

En tercer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=4$ para una modulación 4-QAM, obteniéndose el siguiente resultado:

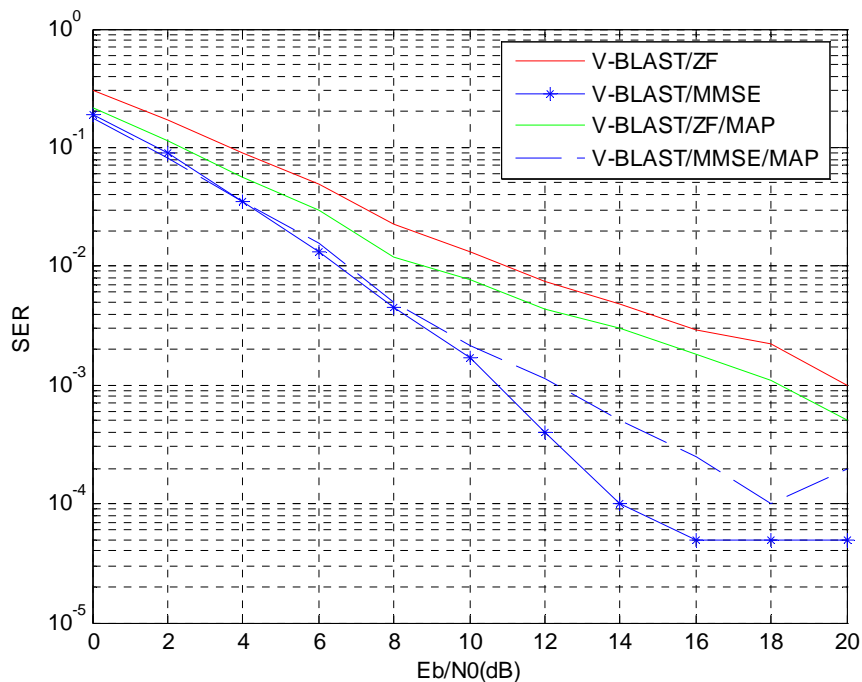


Figura 27: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse en la gráfica adjunta, los resultados de simulación presentan un comportamiento similar al obtenido empleando 3 antenas en transmisión y en recepción: la mejor respuesta en cuanto a SER la presenta el algoritmo *V-BLAST/MMSE*, seguido de la versión *V-BLAST/MMSE/MAP*. Al igual que en el caso anterior, la versión *V-BLAST/ZF/MAP* sí presenta un mejor comportamiento que la versión *ZF* del algoritmo original. Además puede observarse que para los mismos valores de E_bN_0 que en el caso de 3 antenas, se produce una reducción de SER .

Influencia de la modulación utilizada:

En este apartado se van a realizar varias simulaciones con el objetivo de comparar el efecto que tiene el número de puntos de la modulación de la modulación empleada.

Para ello, se muestra de nuevo la simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=8$ y $N_R=12$ y para una modulación *16-QAM*:

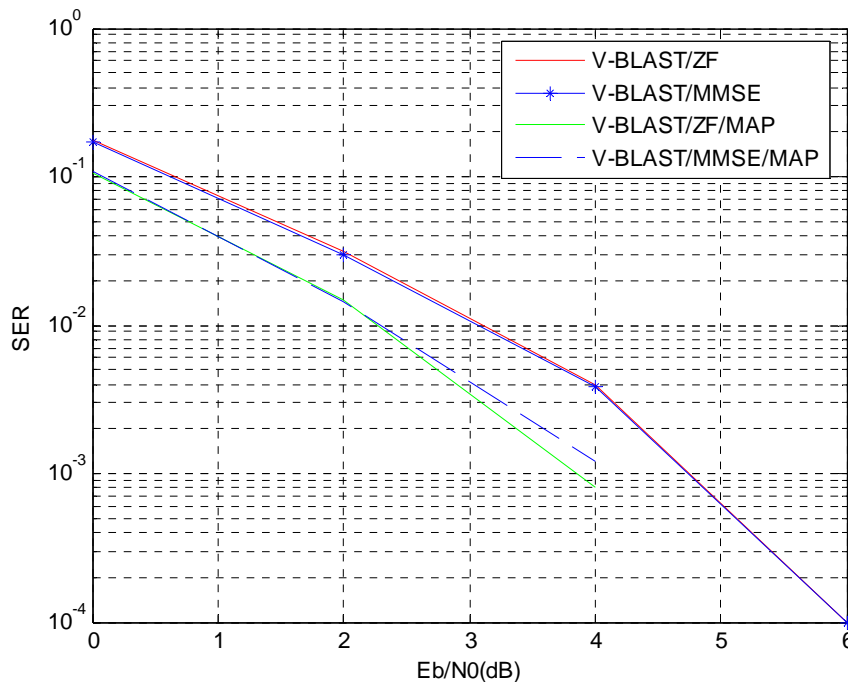


Figura 28: *Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 16-QAM*

Como se comentó en el apartado anterior, se observa que el algoritmo *V-BLAST/MAP*, en sus dos versiones, proporciona una mejora de las prestaciones con respecto al algoritmo *V-BLAST* original. Además se observa que la versión *MMSE* de éste presenta unas mejores prestaciones que la versión *MMSE*, produciéndose el efecto al caso del algoritmo original.

En segundo lugar se realiza una simulación para el mismo número de antenas en transmisión y en recepción, $N_T=8$ y $N_R=12$ y para una modulación 4-QAM, obteniéndose el siguiente resultado:

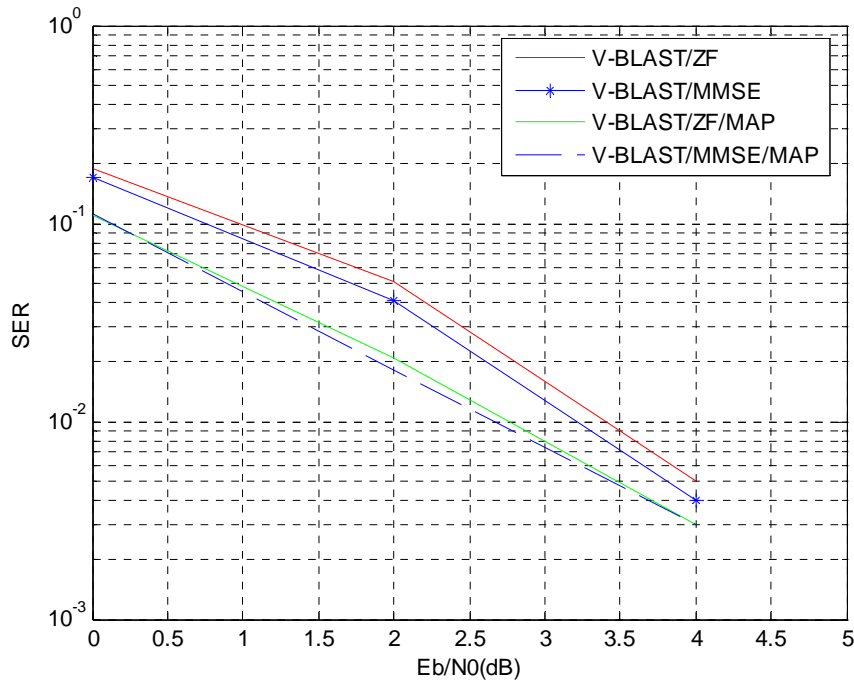


Figura 29: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse, el comportamiento general seguido por las curvas es el mismo, presentando la modificación V-BLAST/MAP una importante mejora en las prestaciones con respecto al V-BLAST original. No obstante, se observa que, si bien empleando la modulación 16-QAM la V-BLAST/MAP/ZF presentaba un comportamiento mejor que la versión MMSE, a partir de los 2.5 dB, en este caso, la versión MMSE presenta un mejor comportamiento hasta los 4 dB, momento en el que sus comportamientos son muy similares. Además, observamos que al emplear la modulación 4-QAM observamos una mayor diferencia entre los comportamientos de las versiones ZF y MMSE de cada uno de los algoritmos.

4. Comparativa Tomlinson-Harashima:

Comportamiento con la SER:

A continuación se realiza una simulación para comprobar el comportamiento del algoritmo *Tomlinson-Harashima* en sus versiones *MMSE* y *ZF* con respecto a las versiones *MMSE* y *ZF* respectivamente. La simulación se realiza para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=6$ y una modulación *4-QAM*.

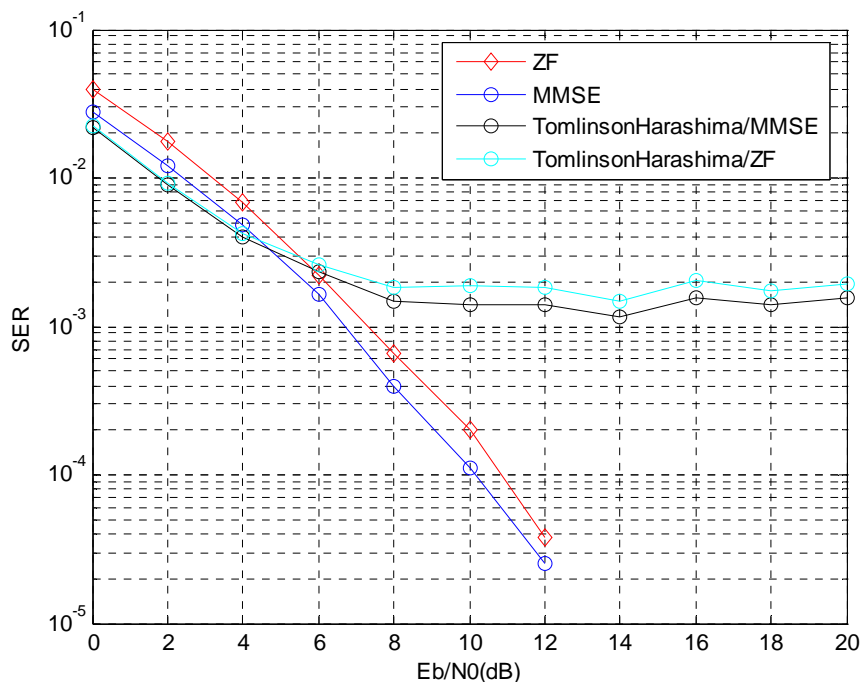


Figura 30: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 6 antenas receptoras, con una modulación *4-QAM*

Como puede observarse a partir de la gráfica obtenida en Matlab, el algoritmo *Tomlinson-Harashima* presenta un comportamiento más óptimo que los algoritmos tradicionales para valores bajos de E_bN_0 (aproximadamente hasta los 5dB). Para valores superiores, los algoritmos *ZF* y *MMSE* presentan una caída más abrupta de la SER, que en el caso del *Tomlinson-Harashima* es más suave, llegando prácticamente a estabilizarse.

Comportamiento con el número de antenas:

Como en los casos de estudio anteriores, se realizan varias simulaciones para comprobar cómo varía el comportamiento del algoritmo *Tomlinson-Harashima* en sus versiones *MMSE* y *ZF* con respecto al número de antenas, comparándolo de nuevo con las versiones tradicionales *MMSE* y *ZF*, respectivamente.

De nuevo, las simulaciones se llevan a cabo en el caso crítico en que se emplean el mismo número de antenas transmisoras que receptoras.

En primer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=2$ y $N_R=2$ y para una modulación 4-QAM.

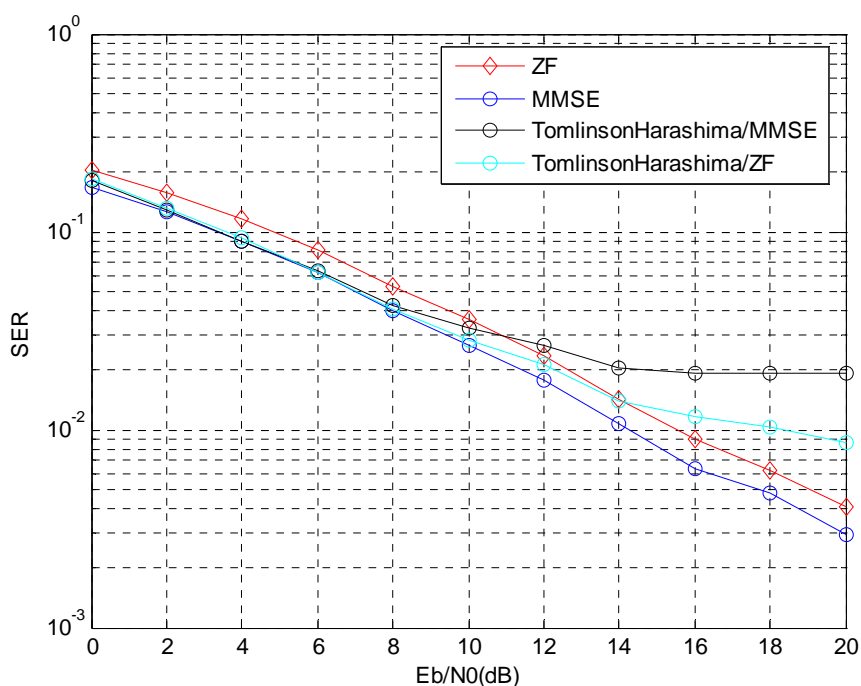


Figura 31: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse, el algoritmo *Tomlinson-Harashima* presenta un mejor comportamiento que los algoritmos tradicionales para valores bajos de EbN_0 (en concreto hasta los 9 dB aproximadamente). A partir de entonces los algoritmos tradicionales reducen su *SER* en mayor proporción que el algoritmo de estudio. Hasta este valor umbral de EbN_0 , las versiones *MMSE* y *ZF* del *Tomlinson-Harashima* presentan un comportamiento muy similar. Sin embargo, a partir de este valor la versión *ZF* se desmarca de la *MMSE*, presentado un mejor comportamiento.

En segundo lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=3$ y $N_R=3$ y para una modulación 4-QAM.

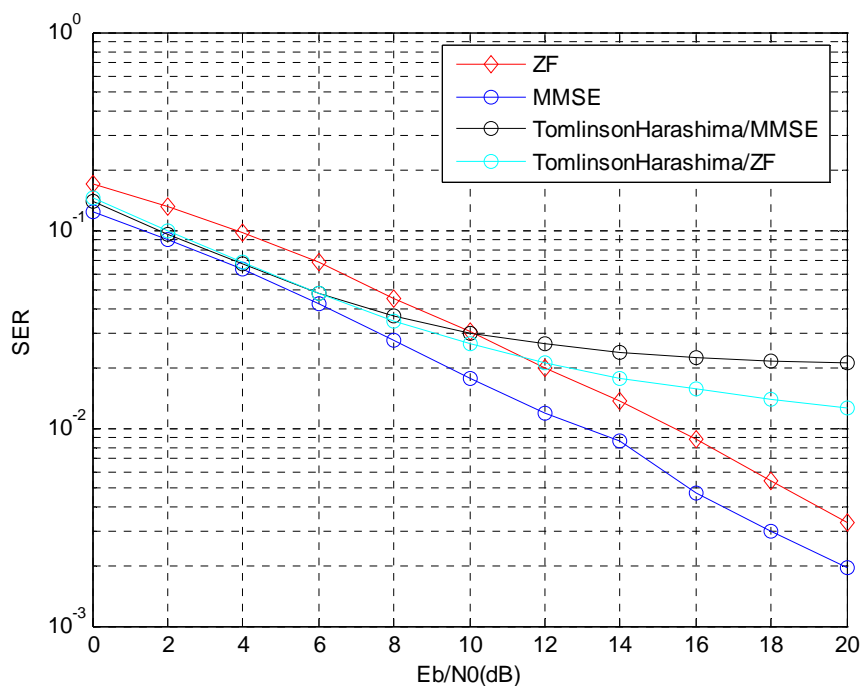


Figura 32: Valor de *SER* frente a EbN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

En este caso se observa que, mientras los algoritmos tradicionales reducen su *SER* para los mismos valores de EbN_0 que en el caso de dos antenas, el algoritmo *Tomlinson-Harashima* aumenta ligeramente sus valores de *SER*, a medida que la EbN_0 crece, con respecto al caso anterior. En este caso, se observa además que los algoritmos *Tomlinson-Harashima* no mejoran en ningún momento el comportamiento presentado por la versión *MMSE* tradicional. De nuevo, los resultados presentados por las versiones *MMSE* y *ZF* del algoritmo de estudio son muy similares hasta los 8 dB en este caso, presentando a partir de ese punto un mejor comportamiento la versión *MMSE*.

En tercer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=4$ y para una modulación 4-QAM.

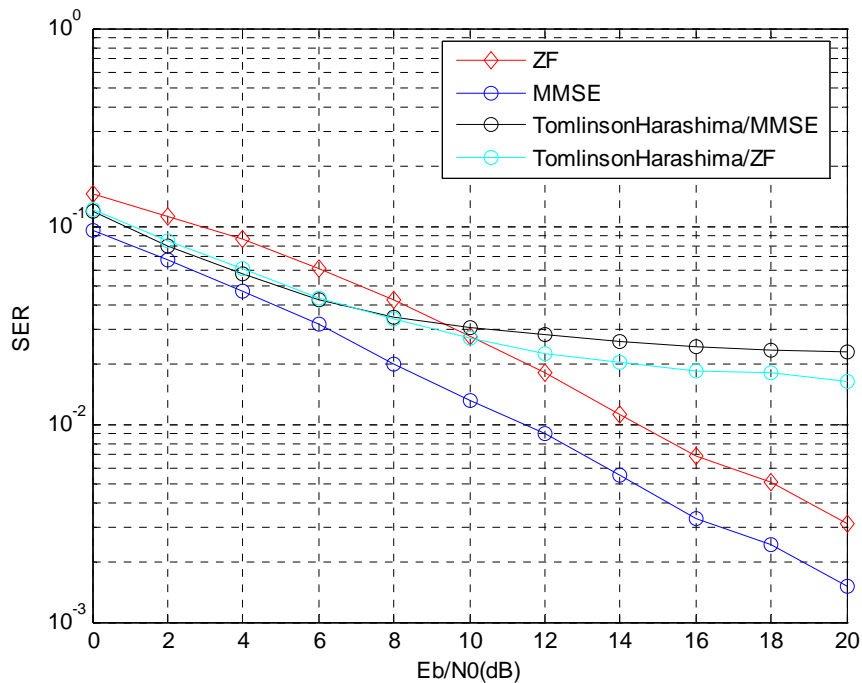


Figura 33: Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

En este caso, el comportamiento del algoritmo tradicional MMSE sigue siendo mejor en el intervalo considerado que las dos versiones del Tomlinson-Harashima, presentando una mayor diferencia en prestaciones que en el caso de 3 antenas. De nuevo, el comportamiento de las dos versiones de Tomlinson-Harashima comienza a diferenciarse a partir de los 10 dB en este caso. Observamos de nuevo, que al aumentar el número de antenas, el algoritmo Tomlinson-Harashima no reduce la SER obtenida para valores altos de E_bN_0 , mientras que los algoritmos tradicionales sí la disminuyen.

Influencia de la modulación utilizada:

En este apartado se procede a realizar varias simulaciones con el objetivo de comparar el efecto que tiene el número de puntos de la modulación empleada, en el comportamiento de los algoritmos con la *SER*.

Para ello, se muestra la gráfica obtenida para un número de antenas transmisoras $N_T=8$ y $N_R=12$ y para una modulación 4-QAM:

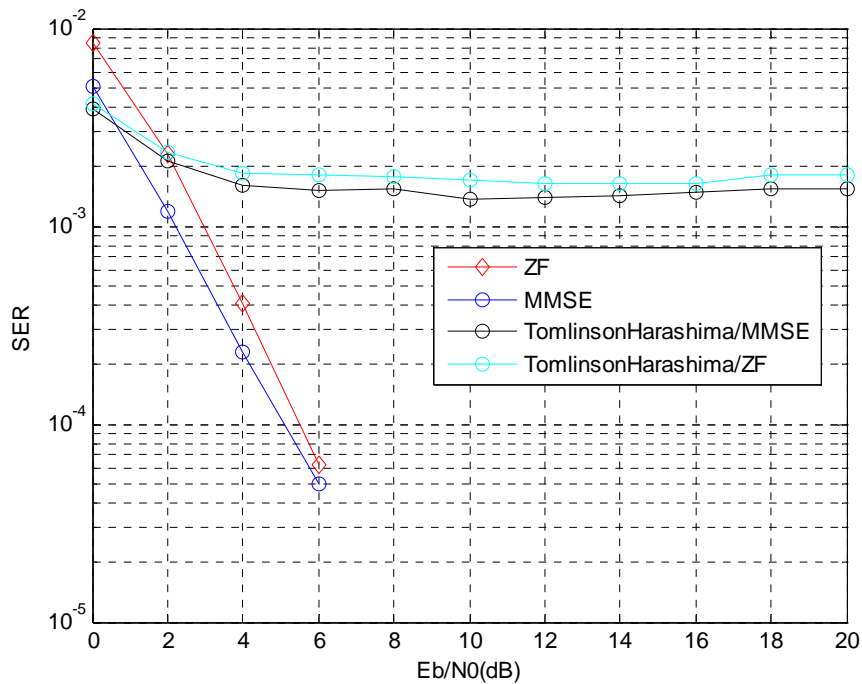


Figura 34: Valor de *SER* frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse, el comportamiento del *Tomlinson-Harashima* en sus dos versiones es muy similar, presentando en todo el intervalo de E_bN_0 un peor comportamiento que la versión *MMSE* tradicional. Además, su comportamiento en *SER* a partir de los 2 dB se mantiene relativamente estable, presentando mejores prestaciones la versión *MMSE*.

Realizamos ahora una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=8$ y $N_R=12$ y para una modulación *16-QAM*:

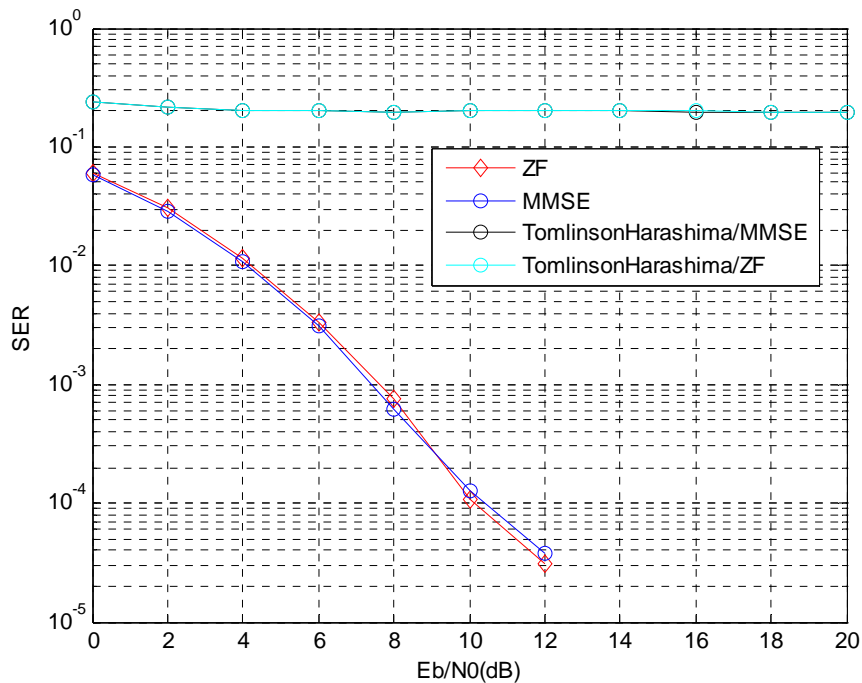


Figura 35: Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación *16-QAM*

Como puede verse, al aumentar el número de puntos de la constelación empleada, el algoritmo *Tomlinson-Harashima* experimenta una notable degradación de sus prestaciones. Además, como se ha observado para otros algoritmos, las curvas de actuación de la SER ralentizan su caída para los mismos valores de E_bN_0 .

A continuación procedemos a comparar en una misma figura el comportamiento de los algoritmos de estudio, para el mismo número de antenas transmisoras y receptoras que en las figuras anteriores, para las modulaciones *4-QAM* y *16-QAM* respectivamente. El resultado obtenido es el siguiente:

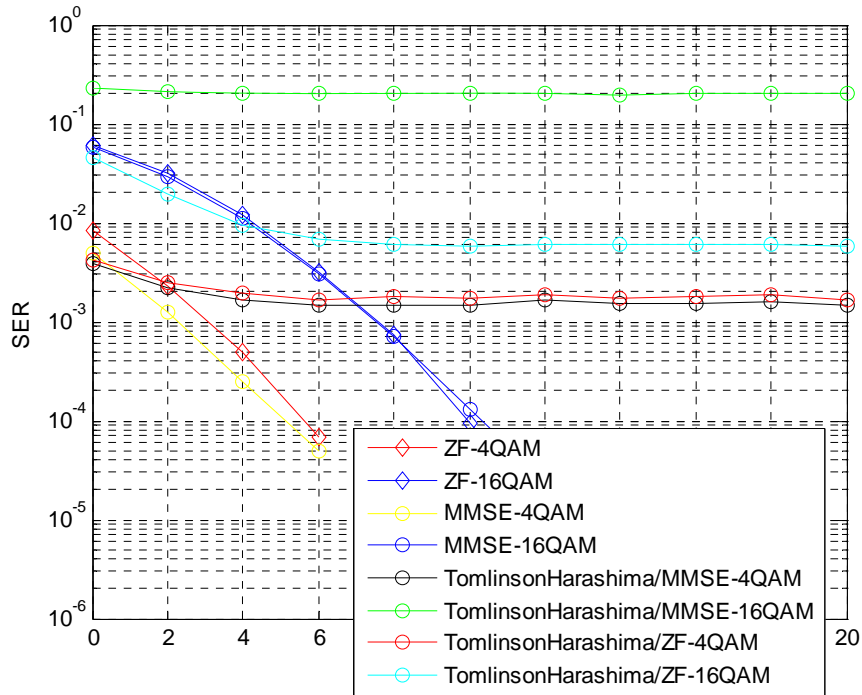


Figura 36: *Valor de SER frente a E_bN_0 para 8 antenas transmisoras y 12 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM y 16-QAM respectivamente*

En esta gráfica conjunta podemos observar que, si bien entre las versiones *MMSE* y *ZF* del *Tomlinson-Harashima* apenas existe diferencia cuando se emplea una modulación 4-QAM, al emplear una modulación 16-QAM, ambas versiones difieren en gran medida, presentando un mejor comportamiento la versión *ZF*. En el caso de los algoritmos tradicionales, como se ha venido comentando, a medida que se aumenta el número de puntos de la modulación empleada, la *SER* disminuye con una menor pendiente.

5. Comparativa General de Algoritmos:

Comportamiento con la SER:

Se va a proceder a realizar una simulación en la que se va a obtener una comparativa entre los algoritmos de estudio *V-BLAST*, *GDFE* y *Tomlinson-Harashima* (La versión *V-BLAST/MAP* no se incluye en estas gráficas, por el aumento de complejidad que implica) sometidos a las mismas condiciones.

Para comparar el comportamiento de cada uno de estos algoritmos con respecto a la *SER*, se realiza una simulación en la que se emplean $N_T=2$ antenas transmisoras y $N_R=3$ antenas receptoras, para una modulación *4-QAM*.

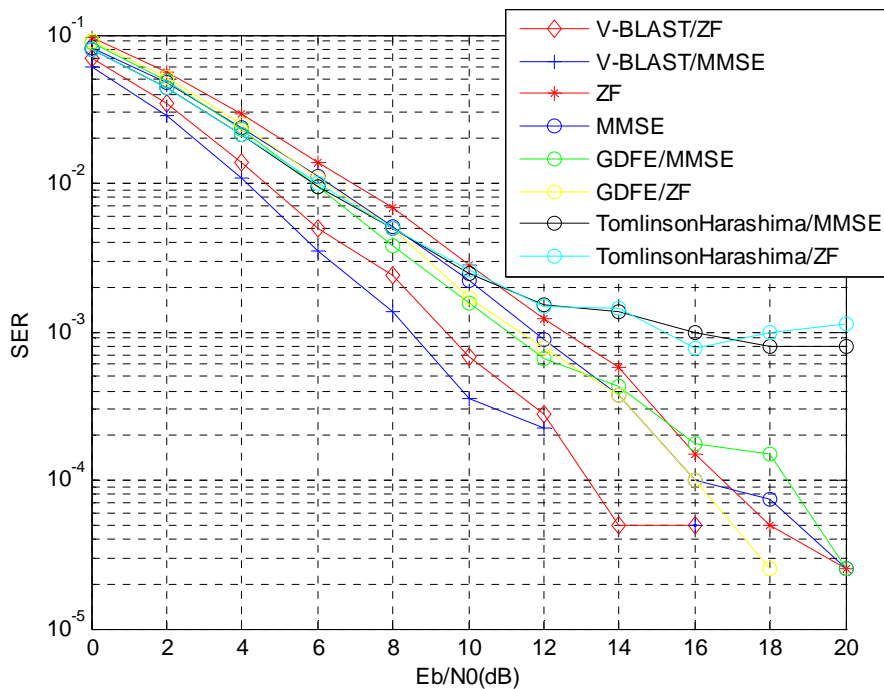


Figura 37: Valor de *SER* frente a E_b/N_0 para 2 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación *4-QAM*

Como puede observarse, el mejor comportamiento lo presentan los algoritmos *V-BLAST*, siendo la versión *MMSE* la mejor. Los algoritmos *GDFE* presentan, hasta un valor de EbN_0 de 14 dB, un comportamiento mejor que los algoritmos tradicionales, siendo mejor la versión *MMSE*. Sin embargo, a partir de este valor de EbN_0 , las prestaciones de los algoritmos *GDFE* comienzan a empeorar con respecto a los algoritmos *ZF* y *MMSE* tradicionales. Por su parte, el algoritmo *Tomlinson-Harashima* tiene un comportamiento similar al presentado por el *GDFE* hasta un valor de EbN_0 de 8 dB, consiguiendo una disminución de la *SER* menos pronunciada para valores superiores de EbN_0 .

Comportamiento con el número de antenas:

Como en los casos de estudio anteriores, se realizan varias simulaciones para comprobar cómo varía el comportamiento de los algoritmos estudiados con respecto al número de antenas empleado, para la situación crítica en que tenemos el mismo número de antenas en transmisión y en recepción.

En primer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=2$ y $N_R=2$ y para una modulación *4-QAM*.

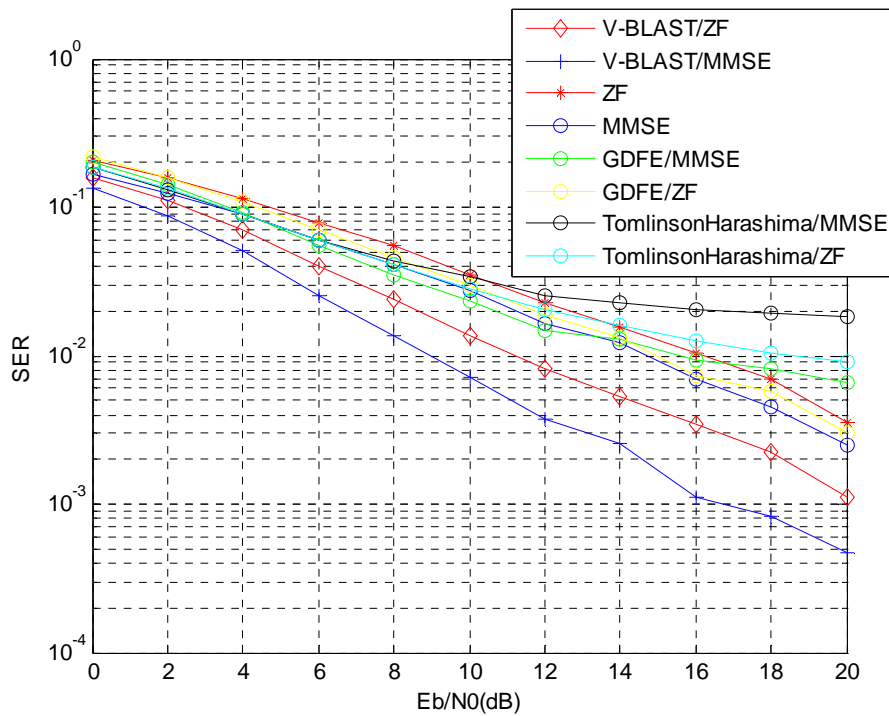


Figura 38: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse, de nuevo los algoritmos *V-BLAST*, en sus dos versiones, presentan el mejor comportamiento, con una *SER* mucho menor para los mismos valores de E_bN_0 . De nuevo se observa que hasta un valor de E_bN_0 de 16 dB, el comportamiento del algoritmo *GDFE* es mejor en sus dos versiones que el de los algoritmos tradicionales, presentando siempre mejores resultados la versión *MMSE*. Sin embargo, a partir de este valor, el comportamiento del algoritmo *GDFE* empeora con respecto al de los algoritmos tradicionales. En el caso del *Tomlinson-Harashima*, su comportamiento es muy similar al presentado por el *GDFE* para valores de E_bN_0 bajos, aunque la disminución de *SER* en el caso del *Tomlinson-Harashima* es menos pronunciada a medida que aumenta el valor de E_bN_0 .

En tercer lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=3$ y $N_R=3$ y una modulación 4-QAM.

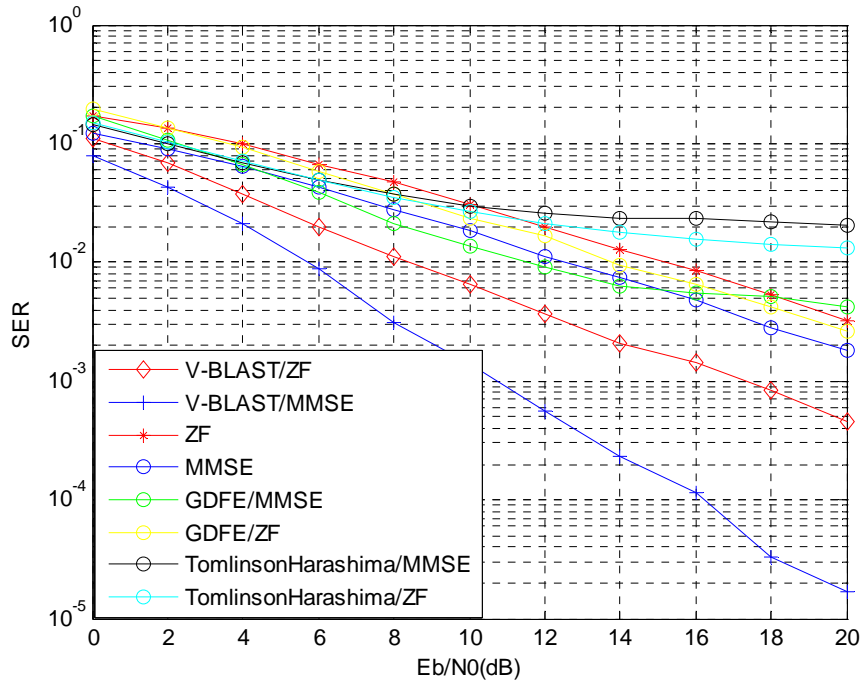


Figura 39: Valor de SER frente a EbN_0 para 3 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse, en el caso del algoritmo *Tomlinson-Harashima*, para valores altos de EbN_0 , los niveles de SER aumentan ligeramente con respecto al caso de 2 antenas. En el caso del algoritmo *V-BLAST*, el más óptimo, los valores de SER disminuyen al aumentar el número de antenas. Con respecto al algoritmo *GDFE*, se observa que hasta un valor de EbN_0 de 14 dB, el comportamiento del algoritmo *GDFE* es mejor en sus dos versiones que el de los algoritmos tradicionales, presentando siempre mejores resultados la versión *MMSE*. No obstante, el valor de SER alcanzado disminuye con respecto al caso de dos antenas, aunque no de forma tan pronunciada como en el caso *V-BLAST*.

En segundo lugar se realiza una simulación para un número de antenas transmisoras $N_T=4$ y $N_R=4$ y para una modulación 4-QAM.

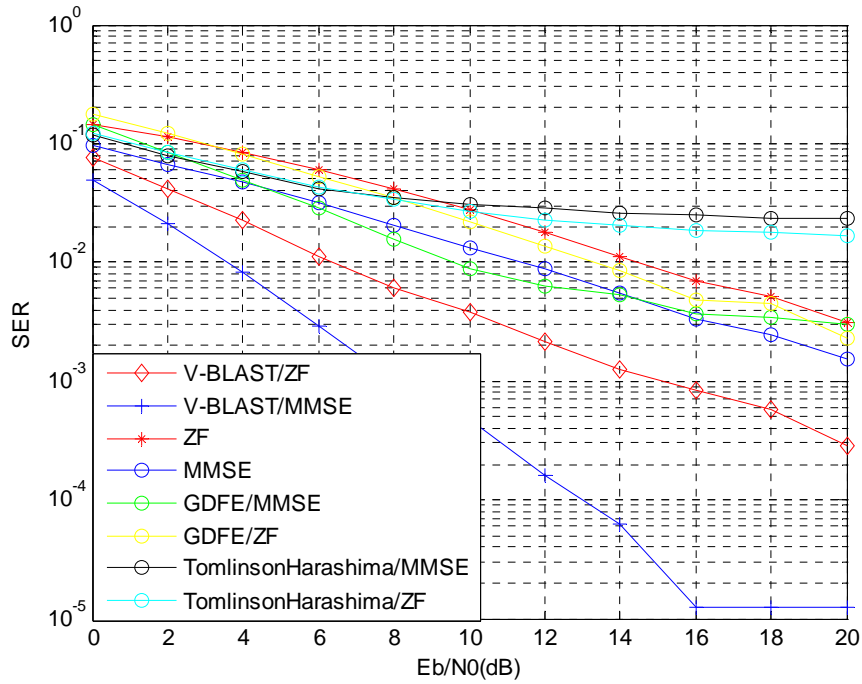


Figura 40: *Valor de SER frente a E_bN_0 para 4 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM*

Como se observa a partir de los resultados gráficos obtenidos, el algoritmo *Tomlinson-Harashima* aumenta ligeramente el valor de *SER* para valores altos de E_bN_0 con respecto al caso de estudio de 3 antenas en transmisión y en recepción. En el caso de los algoritmos *V-BLAST*, que de nuevo son los que presentan un comportamiento más óptimo, la *SER* disminuye para los mismos valores de E_bN_0 que en el caso de 3 antenas. Con respecto al algoritmo *GDFE*, presenta un mejor comportamiento que los algoritmos tradicionales hasta los 16 dB, 2 dB más tarde que en el caso de estudio anterior. Por tanto, su comportamiento mejora al aumentar el número de antenas en la misma proporción.

Influencia de la modulación utilizada:

En este apartado se van a realizar varias simulaciones con el objetivo de comparar el efecto que tiene el número de puntos de la modulación de la modulación empleada sobre el comportamiento de los algoritmos estudiados.

Para ello, se va a proceder a comparar la Figura (primera figura del punto 5) en la que observábamos el comportamiento obtenido para un número de antenas transmisoras $N_T=2$ y $N_R=3$ y para una modulación 4-QAM con el obtenido para el mismo número de antenas transmisoras y receptoras, con una modulación 16-QAM en este caso.

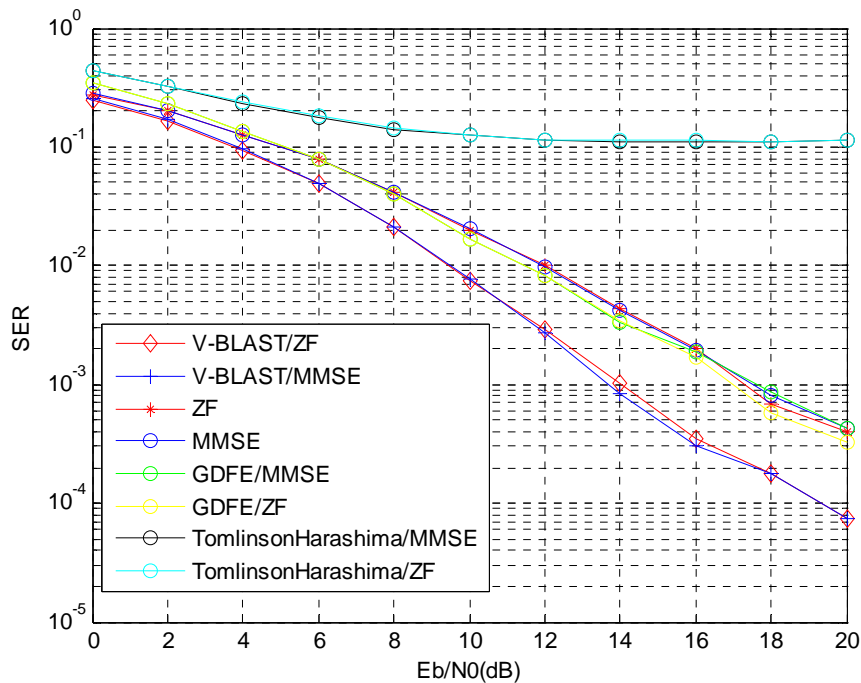


Figura 41: Valor de SER frente a E_bN_0 para 2 antenas transmisoras y 3 antenas receptoras, con una modulación 16-QAM

Como puede observarse, el algoritmo *Tomlinson-Harashima* presenta un comportamiento mucho más degradado al aumentar el número de puntos de la constelación. En el caso de los restantes algoritmos, la caída de la SER es menos abrupta para los mismos valores de E_bN_0 , observando también un comportamiento mucho más similar en este caso, entre las respectivas versiones ZF y $MMSE$ de los algoritmos.

Mayor número de antenas transmisoras que receptoras:

Se va a proceder a analizar un caso particular de estudio, que consiste en el análisis del comportamiento de los distintos algoritmos, en su versión *MMSE*, cuando se emplea un mayor número de antenas transmisoras que receptoras.

En un primer caso simulamos los resultados obtenidos para un número de antenas transmisoras $N_T=3$ y $N_R=2$ y para una modulación *4-QAM*

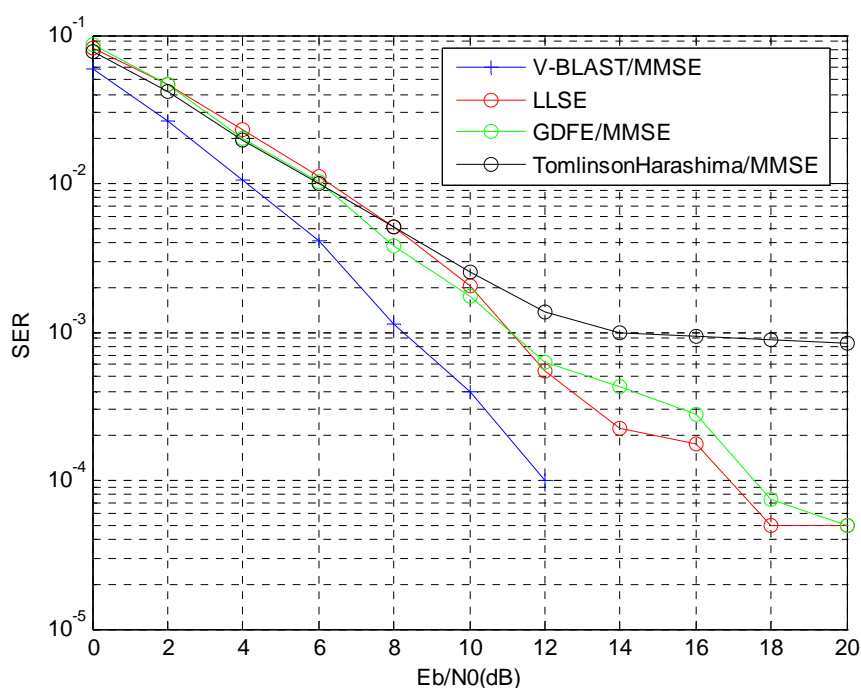


Figura 42: Valor de SER frente a E_bN_0 para 3 antenas transmisoras y 2 antenas receptoras, con una modulación *4-QAM*

Como puede observarse, todos los algoritmos degradan en gran medida sus prestaciones, aunque el algoritmo *Tomlinson-Harashima* es el que sufre una menor degradación con respecto a las situaciones estudiadas en las que, o bien se tenía el mismo número de antenas en transmisión que en recepción, o bien se tenían más antenas en recepción que en transmisión.

A continuación simulamos los resultados obtenidos para un número de antenas transmisoras $N_T=6$ y $N_R=4$ y para una modulación 4-QAM

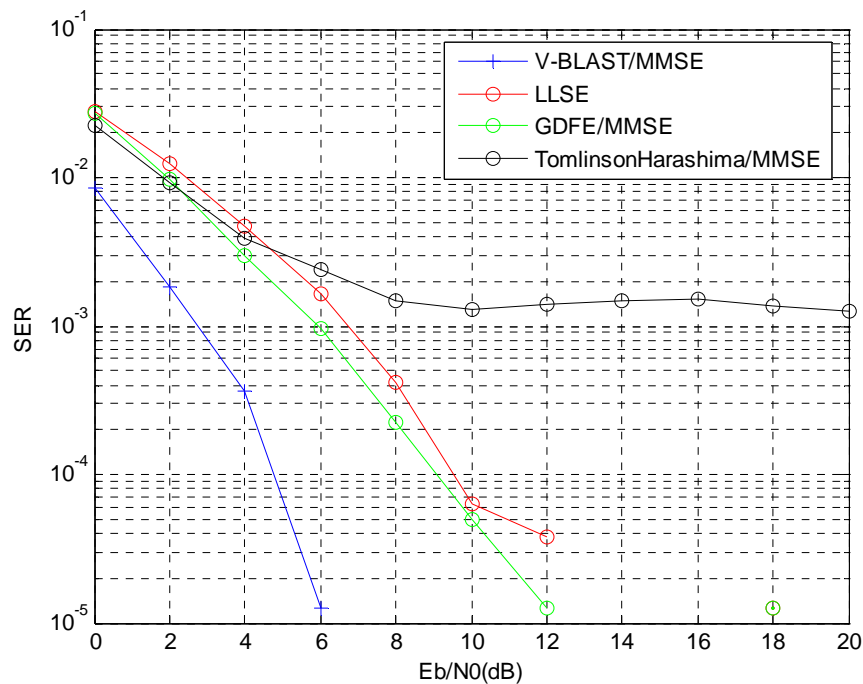


Figura 43: Valor de SER frente a E_bN_0 para 6 antenas transmisoras y 4 antenas receptoras, con una modulación 4-QAM

Como puede observarse, al aumentar en la misma proporción el número de antenas transmisoras y receptoras, todos los algoritmos experimentan una mejora en cuanto a SER, excepto el algoritmo Tomlinson-Harashima, que ve su SER incrementada ligeramente para valores altos de E_bN_0 con respecto al caso anterior. Sin embargo, si bien en el caso anterior la SER disminuía progresivamente al crecer la E_bN_0 en todos los casos, ahora decrece mucho más abruptamente, a excepción del caso Tomlinson-Harashima, como hemos venido observando.

Capítulo 9: Conclusiones

Con este Proyecto Fin de Carrera se ha pretendido profundizar en el estudio de las conocidas técnicas *V-BLAST*, *GDFE* y de algunas modificaciones introducidas a estos algoritmos como el algoritmo *V-BLAST/MAP* y la técnica de pre-codificación *Tomlinson-Harashima*.

Se pretendía de esta forma corroborar las conocidas buenas prestaciones proporcionadas por los algoritmos *BLAST* y los estudios que afirmaban que los algoritmos *GDFE* permitían alcanzar prestaciones similares, aprovechando el vasto conocimiento ya adquirido sobre los Ecualizadores de Decisiones Realimentadas.

Los resultados de simulación fruto de este análisis, indican que los algoritmos *V-BLAST* son los que presentan unas mejores prestaciones, siendo su comportamiento bastante diferencial con respecto al resto de técnicas empleadas. La versión *MMSE* de este algoritmo es la que presenta, además, una actuación más óptima.

En el caso de *V-BLAST*, se observó que, al aumentar el número de antenas en transmisión y en recepción, se conseguía disminuir la *SER* con respecto a la EbN_0 , siendo este efecto más pronunciado en la versión *MMSE*.

En el caso de *GDFE*, se observa que, si bien su comportamiento siempre es peor que el de *V-BLAST*, para valores de EbN_0 bajos su comportamiento es mejor que el de las versiones *MMSE* y *ZF* tradicionales, presentando la versión *GDFE/MMSE* un mejor comportamiento. A partir de un cierto valor de EbN_0 (que varía en función de las características del sistema de comunicación: número de antenas, tipo de modulación,...), las versiones tradicionales presentan una mejor actuación. A medida que aumentamos el número de antenas en transmisión y recepción se disminuye la *SER* con respecto a la EbN_0 (aunque no en la misma proporción que en el caso *V-BLAST*) y las versiones *ZF* y *MMSE* presentan una mayor diferencia en su comportamiento.

Al observar estos comportamientos, se decidió estudiar una modificación del algoritmo original *V-BLAST* que prometía una mejor actuación frente a un ligero aumento de complejidad. Se comprobó que, si bien para un número pequeño de antenas la versión *V-BLAST/MAP/MMSE* no mejoraba las prestaciones de *V-BLAST/MMSE* (siendo ésta la que presentaba un mejor comportamiento), cuando el número de antenas aumentaba, tanto en transmisión como en recepción, era la versión *V-BLAST/MAP/ZF* la que presentaba un mejor comportamiento, muy similar al de la aproximación *ML*, como se comprobó. Sin embargo, la complejidad introducida hace que, cuando el número de antenas crece mucho, no sea tan bueno.

Posteriormente se decidió comprobar la dualidad de la estrategia *GDFE*, que si bien no proporcionaba las mismas prestaciones que *V-BLAST*, presenta un buen comportamiento, trasladándola al transmisor, como propone la técnica de pre-codificación *Tomlinson-Harashima*. Al realizar las simulaciones se comprobó que no se alcanzaban unas prestaciones tan buenas como las alcanzadas con los demás algoritmos. Esto se debe a que al realizar la pre-codificación se realiza una realimentación con una matriz diagonal, la misma matriz diagonal que empleamos en recepción en el algoritmo *GDFE*, pero la señal atraviesa un canal no diagonal, introduciéndose así una cierta *ISI* que no conseguimos eliminar y que deteriora el comportamiento del sistema. Por este motivo observamos que tanto al aumentar el número de antenas como al aumentar el número de puntos de la constelación, su comportamiento empeora

En todas las técnicas estudiadas hemos observado que, al aumentar el número de puntos de la constelación empleada, se conseguía una disminución menos pronunciada de la *SER* con respecto a la EbN_0 y una mayor similitud entre los comportamientos *MMSE* y *ZF*.

Se realizó además una prueba en la que se empleaba un mayor número de antenas transmisoras que receptoras. En todos los casos, las curvas de actuación sufrieron un importante deterioro, siendo el menos pronunciado el del algoritmo *Tomlinson-Harashima*. Además se comprobó que, en esta situación, al aumentar el número de antenas, las curvas de todos los algoritmos experimentaban una mejora en cuanto a los niveles de *SER*, incluido el *Tomlinson-Harashima*, aunque la disminución de la *SER* frente a la EbN_0 era menos abrupta.

Por tanto, tras el análisis realizado de estas técnicas se deducen los siguientes puntos:

- El algoritmo que presenta mejores prestaciones es el *V-BLAST*, y en particular la versión *MMSE*.
- El algoritmo *GDFE* presenta mejores prestaciones que los *ZF* y *MMSE* tradicionales para niveles bajos de EbN_0 , empeorando su comportamiento a medida que ésta aumenta. La mejor versión es también la *MMSE*.
- La versión *V-BLAST/MAP* mejora las prestaciones con respecto a *V-BLAST* para un número no pequeño de antenas, teniendo en cuenta que si éste crece en exceso, el aumento de complejidad puede ser insostenible.
- La versión *Tomlinson-Harashima* presenta una actuación óptima para un número pequeño de antenas y valores de EbN_0 bajos, ya que si no se tiene en cuenta un canal no diagonal, la *ISI* introducida en el resto de casos deteriora mucho sus prestaciones.

Capítulo 10: Líneas Futuras

La arquitectura *BLAST*, que como se ha comprobado en el presente Proyecto presenta unas excelentes prestaciones en sistemas *MIMO* multiusuario, presenta múltiples versiones. En el abordaje hecho en este Proyecto, se han analizado las versiones *D-BLAST* y *V-BLAST*, aunque sólo se ha implementado esta última. Existen otras versiones muy atractivas en términos de eficiencia, como la adaptación de Turbo-Códigos a esta arquitectura, propuesta por Sellathurai y Haykin [29] conocida como *T-BLAST*.

Además sería conveniente estudiar en profundidad la técnica de pre-codificación *Tomlinson-Harashima*. Esto nos permitiría mejorar la versión implementada con un filtro de pre-codificación \mathbf{B} adecuado, que consiga que el algoritmo no sature a medida que se aumenta la EbN_0 , mejorando por consiguiente sus prestaciones.

Una opción a considerar también como línea futura de investigación consistiría en añadir un banco de medida *MIMO* con el que se podrían obtener resultados experimentales acerca de las distintas tecnologías estudiadas, en modelos de canal más realistas y que permitirían obtener una completa herramienta de estudio de los sistemas *MIMO*.

Relación de Acrónimos:

AWGN	Additive White Gaussian Noise
BER	Bit Error Rate
BLAST	Bell Labs Layered Space-Time
CSI	Channel State Information
D-BLAST	Diagonal- Bell Labs Layered Space-Time
FDP	Función de Densidad de Probabilidad
HSDPA	High-Speed Downlink Packet Access
ISI	Inter-Symbol Interference
iid	independent and identically-distributed
MAP	Máximo A Posteriori
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MISO	Multiple-Input Single-Output
MMSE	Minimum Mean Squared Error
MMSE-LE	Minimum Mean Squared Error Linear Equalizer
ML	Maximum Likelihood
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
OFDMA	Orthogonal Frequency Division Multiple Access
PSK	Phase Shift Keying
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
RMS	Root Mean Square
RLS	Recursive Least Squares
SIMO	Single-Input Multiple-Output
SISO	Single-Input Single-Output
SMS	Short Message Service
SNR	Signal-to-Noise-Ratio

SVD	Singular Value Decomposition
V-BLAST	Vertical-Bell Labs Layered Space-Time
WCDMA	Wideband Code Division Multiple Access
WIMAX	Worldwide Interoperability for Microwave Access
WiFi	Wireless Fidelity
WLAN	Wireless Local Area Network
WMAN	Wireless Metropolitan Area Network
ZF	Zero Forcing

Referencias Bibliográficas:

- [1] A.Paulraj and T.Kailath (1994): “Increasing capacity in wireless broadcast systems using distributed transmission /directional reception”. U. S. Patent 5, 345, 599.**
- [2] S.H.Nam, O.-S.Shin y K.B.Lee,” Transmit Power Allocation for a Modified V-BLAST System”, IEEE Trans. Commun., vol.2, pp.808-813, Junio 2004.**
- [3] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden y R. A. Valenzuela, “VBLAST: An Architecture for Realizing Very High Data Rates Over the Rich-Scattering Wireless Channel” Proc. ISSE, Pisa, Italia, Septiembre 1998.**
- [4] D. Wübben, R. Böhnke, V. Kühn, y K.-D. Kammeyer, “MMSE Extension of V-BLAST based on Sorted QR Decomposition”, IEEE Proc. VTC 2003-Fall, vol. 1, pp. 508-512, Octubre 2003.**
- [5] G. J. Foschini “Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas” Bell Labs. Tech. J., 1 (2): 41-59, 1996.**
- [6] Gerard J. Foschini and Michael. J. Gans (January 1998). “On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas”. Wireless Personal Communications 6 (3): 311-335.**
- [7] H. Bölcskei, D. Gesbert, C. B. Papadias and A-J. van der Veen. “Space-Time Wireless Systems. From Array Processing to MIMO Communications”. Cambridge University Press 2006.**
- [8] A. Paulraj, R. Nabar and D. Gore. “Introduction to Space-Time Wireless Communications”. Cambridge University Press, Mayo 2003.**
- [9] I. Berenguer and X. Wang. “Coding and Signal Processing for MIMO Communications”. Journal of Comp. Sci. and Tech. 2003 Citeseer.**
- [10] G. Foschini, M. Gans. “On limits of wireless communication in a fading environment when using multiple antennas” Wireless Personal Communications, pp. 311-335 Marzo 1998.**
- [11] E. Telatar “Capacity of multi-antenna Gaussian channels” European transactions on Telecommunications, pp. 586-596, Noviembre 1999.**

- [12] R. Müller, A. Lampe, J. Huber “Gaussian multiple-access channels with weighted energy constraint” Proc. IEEE Information Theory Workshop (ITW), pp. 106-107, Killarney, Ireland Junio 1998.
- [13] R. Müller. “An Asymptotic Analysis of BLAST-like Systems” Proc. Of IEEE International Conference on Communications (ICC), Helsinki Junio 2001.
- [14] P. Viswanath, D. Tse, V. Anantharam. Asymptotically Optimal Water-Filling in Vector Multiple-Access Channels. IEEE Trans. Inform. Theory, pp. 241-267, Enero 2001.
- [15] E. Biglieri , G. Caire, G. Taricco “Limiting Performance of Block-Fading Channels with Multiple Antennas” IEEE Trans. Inform. Theory, pp. 1273-1289, Mayo 2001.
- [16] S. Bärö, g. Bacuch, A. Pavlic, A. Semmler “Improving BLAST Performance using Space-Time Block Codes and Turbo Decoding” IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBE-COM 2000) San Francisco, CA, USA, Noviembre 2000.
- [17] G. Bauch “Turbo-Entzerrung und Sendeantennen-Diversity mit Space-Time-Codes” im Mobilfunk, VDI Verlag GmbH Düsseldorf 2001.
- [18] J. Thomas, E. Geraniotis “Space-Time Iterative MMSE Multiuser Detection in Frequency Selective Coded CDMA Wireless Mobile Channels” Proc. Of IEEE Global Telecommunications Conference (Globecom), pp. 2117-2121, Rio de Janeiro, Noviembre 1999.
- [19] G. Raileigh, J. Cioffi “Spatio-Temporal Coding for Wireless Communication” IEEE Trans. Commun., pp. 357-366, Marzo 1998.
- [20] R. Knopp, G. Caire “Power Control Schemes for TDD Systems with Multiple Transmit and Receive Antennas” Proc. Of IEEE Global Telecommunications Conference (Globecom), pp. 2326-2330, Rio de Janeiro, Noviembre 1999.
- [21] S. Kasturia, J. T. Aslanis, J. M. Cioffi “Vector Coding for Partial Response Channels” IEEE Trans. Inform. Theory, pp. 741-762, Julio 1990.
- [22] R. Fischer, C. Windpassinger, A. Lampe, J. Huber “Tomlinson – Harashima Precoding in Space- Time Transmission for Low- Rate Backward Channel ” Proc. 2002 International Zurich Seminar on Broadband Communications.
- [23] R. Fischer, C. Windpassinger, A. Lampe, J. Huber “Space Time Transmission using Tomlinson-Harashima Precoding” Proc. ITGSCC, Berlin, Germany, Enero 2002, pp. 139-147.

- [24] G. Golden, G. Foschini, R. Valenzuela, P. Wolniasky “Detection algorithm and initial laboratory results using the V-BLAST space-time communication architecture” Electronics Letters, pp. 14-15, Enero 1999.
- [25] G. Foschini “Layered Space-Time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment When Using Multiple Antennas” Bell Laboratories Technical Journal, pp. 41-59, Octubre 2001.
- [26] H. Harashima, H. Miyakawa “Matched –transmission technique for channels with intersymbol interference”, IEEE Trans. Comm., pp. 774-780, Agosto 1972.
- [27] M.Tomlinson “New automatic equaliser employing modulo arithmetic” Electronics Letters, pp. 138-139, Marzo 1971.
- [28] G. Golub, C. Van Loan “Matrix Computations” The Johns Hopkins University Press, Baltimore 1996.
- [29] M. Sellathurai y S. Haykin, “TURBO-BLAST for High-Speed Wireless Communications” IEEE Proc. Wireless Comm. Network Conf, vol1, pp. 315-320, Septiembre 2000.
- [30] George Ginis y John M. Cioffi, “On the Relation Between V-BLAST and the GDFE” IEEE Communications Letters, Vol.5, NO 9, Septiembre 2001.
- [31] C.E. Shanon “A Mathematical Theory of Communication” Bell Sys. Tech. Journal, vol. 27, pp. 379-423 1948.
- [32] Jack Winters “Optimum Combining for Indoor Radio Systems with Multiple Users” IEEE Trans. On Communications, Noviembre 1987.
- [33] M. Medard, “The Effect upon Channel Capacity in Wireless Communications of Perfect and Imperfect Knowledge of the Channel” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 46, No. 5, pp. 933-946, Mayo 2000.
- [34] T.Yoo y A. Goldsmith, “Capacity of Fading MIMO Channels with Channel Estimation Error” Proc. 2004 IEEE Int. Conf. Commun. Vol.2, pp. 808-813, Junio 2004.
- [35] Yavuz Yapici, “V-BLAST/MAP: A new Symbol Detection Algorithm for MIMO Channels” Institute of Engineering and Science of Bilkent University, Enero 2005.
- [36] Rubyet Adnan, “Blind Equalization for Tomlinson-Harashima Precoded Systems” University of Canterbury Christchurch, New Zeland, Febrero 2007.
- [38] John M. Cioffi, “Generalized Decision Feedback Equalization” Department of Electrical Engineering, Stanford University 2009.

Anexo

1. Factorización de Cholesky

Es conocido que toda matriz hermitica y definida positiva tiene sus autovalores reales y positivos y, además, en la factorización LU (forma de factorización de una matriz como el producto de una matriz triangular inferior y una superior) todos los pivotes son reales y positivos.

Teorema 1 [Factorización de Cholesky]:

Toda matriz hermitica y definida positiva puede ser descompuesta de la forma $A = R^H \cdot R$, siendo R una matriz triangular superior.

Demostración: Por tratarse de una matriz hermitica y definida positiva, sabemos que admite factorización LU . Sea:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n}/u_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= L \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot V = \\
 &= L \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} \cdot V \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$A = B \cdot R$$

$$\text{Con: } B = L = L \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} \text{ es triangular inferior y}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} \cdot V. \text{ Es triangular superior.}$$

Como A es hermítica, $B \cdot R = A = A^H = R^H \cdot B^H$, por lo que $(R^H)^{-1} \cdot B = B^H \cdot R^{-1}$, y dado que $(R^H)^{-1} \cdot B$ es triangular superior, ambas han de ser diagonales.

Por otra parte:

$$\begin{aligned} B^H \cdot R^{-1} &= (L \cdot D)^H \cdot (D \cdot V)^{-1} = D^H \cdot L^H \cdot V^{-1} \cdot D^{-1} = D \cdot L^H \cdot V^{-1} \cdot D^{-1} \\ &= L^H \cdot V^{-1} \end{aligned}$$

Ya que las matrices diagonales conmutan.

Dado que la matriz $L^H \cdot V^{-1}$ tiene unos en la diagonal y es igual a $B^H \cdot R^{-1}$ que es diagonal, debe ser $B^H \cdot R^{-1} = I$, por lo que $B^H = R$ o, lo que es lo mismo, $B = R^H$, es decir, $A = R^H \cdot R$ con $R = D \cdot V$.

Se ha visto que toda matriz hermítica y definida positiva admite factorización de *Cholesky*, pero podemos llegar más lejos y enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2:

Una matriz hermítica y regular A es definida positiva si, y sólo si, admite factorización de Cholesky.

Demostración: Si es hermitica y definida positiva admite factorización LU con todos los elementos diagonales de U (pivotes) positivos, por lo que admite factorización de *Cholesky*.

Recíprocamente, si A admite factorización de *Cholesky* es $A = R^H \cdot R$ por lo que:

$$A^H = (R^H \cdot R)^H = R^H \cdot R = A \Rightarrow A \text{ es hermitica}$$

Para cualquier vector x no nulo es:

$$x^H \cdot A \cdot x = x^H \cdot R^H \cdot R \cdot x = (R \cdot x)^H \cdot (R \cdot x) = \|R \cdot x\|^2 \geq 0$$

Siendo cero sólo si $R \cdot x = 0$ pero al ser R regular (si no lo fuese tampoco lo sería A en contra de la hipótesis) $R \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$ en contra de la hipótesis de que x no es el vector nulo.

Se tiene por tanto que $x^H \cdot A \cdot x > 0$ para cualquier vector x no nulo, es decir, A es definida positiva.